معادلات دیفرانسیل

جلسه پانزدهم

۱۴۰۰/۸/۲۲

دستگاه معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه n غیرخطی

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$z_1 = y \ , \quad z_2 = y' , \quad \dots , \quad z_n = y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} z_1' = y' = z_2 \\ z_2' = y'' = z_3 \\ \vdots \\ z_n' = y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}$$

که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با توابع مجهول $z_1 , \dots , z_n$. صورت کلی یک دستگاه معادلات مرتبه اول به شکل زیر است :

$$\begin{cases} z_1' = f_1(t, z_1, \dots, z_n) \\ z_2' = f_2(t, z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ z_n' = f_n(t, z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

$$f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \Rightarrow Z' = F(t,Z)$$

$$F(t,Z) = (f_1(t,Z), \dots, f_n(t,Z)) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

تابع F که در هر نقطه فضای $\mathbb{R}^n$ در زمان t یک بردار $F(t,Z)$ نسبت می‌دهد میدان برداری گفته می‌شود

و وقتی که F مستقل از t باشد، $F=F(Z)$، آن را میدان برداری مستقل از زمان گوییم.

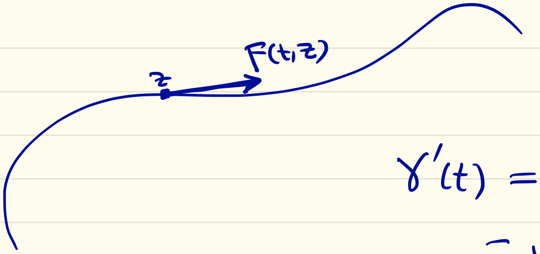
به عنوان مثال اگر جریان سیالی را در نظر بگیریم (یا یک میدان مغناطیسی) در هر نقطه Z از فضا

سرعت حرکت سیال (یا نیروی جاذبه میدان مغناطیسی) با $F(t,Z)$ نشان داده می‌شود.

اگر ذره‌ای را در این محیط در زمان t_0 در نقطه X_0 رها کنیم و مسیر حرکت این ذره را با خم $\gamma(t)$

نشان دهیم، $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ، $\gamma(t_0)=X_0$ سرعت حرکت در زمان t برابر $\gamma'(t)$ است.

در زمان t در نقطه $\gamma(t)$ قرار داریم و سرعت ذره برابر بردار $\gamma'(t)$ است. از طرف دیگر سرعت سیال (یا نیروی جاذبه) در نقطه $\gamma(t)$



برابر $F(t,\gamma(t))$ است. بنابراین باید:

$$\gamma'(t) = F(t,\gamma(t)) \quad , \quad \gamma(t_0) = x_0$$

لذا $\gamma(t)$ جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه است.

نکته ـ هر دستگاه معادلات مرتبه بالاتر را با تغییر متغیر می‌توان به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کرد.

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(t, x, y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} y \\ F(t,z) \end{bmatrix} = G(t,z)$$

$$z = \mathbb{R}^{2n}$$

قضیه وجود و یکتایی جواب: $\dot{X} = F(t,X)$ ، $F = (f_1, \dots, f_n)$

اگر f_1 ، ... ، f_n و همه مشتقات جزئی آنها $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ در ناحیه $\alpha < t < \beta$ و $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$ ، ... ، $\alpha_n < x_n < \beta_n$ پیوسته باشند و نقطه $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ در این ناحیه باشد. آنگاه بازه $|t - t_0| < \delta$ وجود دارد که دستگاه $\dot{X} = F(t,X)$ با شرط اولیه $X(t_0) = X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$ دارای جواب یکتا در این بازه است.

تذکر- وقتی $n=1$ ، قضیه فوق دقیقاً همان قضیه وجود و یکتایی جواب معادله مرتبه اول $y' = f(t,y)$ است که قبلاً گفته شده است.

همچنین با توجه به تغییر متغیری که در ابتدای جلسه گفتیم، معادله مرتبه n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad y(t_0) = y_0, \ y'(t_0) = y_0', \ \dots, \ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

جواب یکتا دارد به شرط آنکه تابع $f(t, z_1, \dots, z_n)$ و مشتقات $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ پیوسته باشند.

$$Z = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \qquad Z' = F(t,Z) = \begin{bmatrix} f_1(t,Z) \\ \vdots \\ f_n(t,Z) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &f_1(t,Z) = z_2, \dots, f_{n-1}(t,Z) = z_n \\ &f_n(t,Z) = f(t, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

همچنین یک معادله خطی مرتبه n که به صورت

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = g(t)$$

معادله

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

که

$$f(t, z_1, \dots, z_n) = g(t) - a_0(t)\,z_1 - a_1(t)\,z_2 - \cdots - a_{n-1}(t)\,z_n$$

و شرط وجود جواب پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial z_i} = a_{i-1}(t)$ است.

در نتیجه هر معادله خطی مرتبه n به شرط آنکه ضرایب آن پیوسته باشد، جواب یکتا دارد.

دستگاه معادلات خطی

$$\dot{X} = F(t, X) = A(t)X + g(t)$$

$A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ است و $g, X : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ بردارهای n-بعدی هستند.

$$F = (f_1, \dots, f_n) \quad , \quad A(t) = [a_{ij}(t)]_{1 \leq i, j \leq n} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_i = f_i(t, X) = a_{i1}(t)x_1 + \cdots + a_{in}(t)x_n + g_i(t)$$

شرط وجود جواب پیوستگی $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}(t)$ و f_i است که معادل این است که

$A(t)$ و $g(t)$ پیوسته باشند.

مهمترین خاصیت دستگاه‌های خطی :

اگر دستگاه خطی همگن $\dot{X} = A(t)X$ را درنظر بگیریم و $X_1(t)$ ، ... ، $X_k(t)$ جواب‌های این دستگاه باشند

آنگاه ترکیب خطی

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_k X_k(t)$$

نیز جواب معادله است برای مقادیر دلخواه

$$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$$

$$\dot{X} = c_1 \dot{X}_1 + \cdots + c_k \dot{X}_k = c_1 A(t) X_1 + \cdots + c_k A(t) X_k$$

$$= A(t) \left[c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k \right] = A(t) X$$

هدف: می‌خواهیم نشان دهیم فضای جواب‌ها معادلهٔ همگن $\dot{X} = A(t)X$ یک فضای n-بعدی است.

یعنی $X_1(t), \dots, X_n(t)$ وجود دارند که $\dot{X}_i = A(t)X_i$

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{bmatrix} \qquad \dot{x}_j^i = a_{j1}x_1^i + a_{j2}x_2^i + \cdots + a_{jn}x_n^i$$

به علاوه این n تابع برداری مستقل خطی هستند.

نکته ـ منظور از استقلال خطی، استقلال توابع است که نباید با استقلال برداری اشتباه گرفته شود.

مثلاً $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ و $X_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ به عنوان دو بردار وابسته خطی هستند $X_2(t) = t\,X_1(t)$

ولی به عنوان دو تابع برداری مستقل هستند.

استقلال خطی برداری: بردارهای $X_1, \dots, X_k$ وابسته خطی هستند اگر یک ترکیب خطی از آنها وجود داشته باشد که

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0$$

و $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 \neq 0$ (یکی از ضرایب حداقل مخالف صفر باشد)

استقلال خطی توابع: توابع برداری $X_1(t), \dots, X_k(t)$ را در بازه $t \in I$ وابسته خطی گوییم هرگاه ضرایب ثابت $c_1, \dots, c_k$ وجود داشته باشند که

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_kX_k(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 \neq 0$$

نکته - اگر لااقل در یک زمان t_0، بردارهای $X_1(t_0), \dots, X_k(t_0)$ مستقل خطی باشند، آنگاه توابع $X_1(t), \dots, X_k(t)$ توابع برداری مستقل هستند. (هرچند ممکن است زمان t_1 وجود داشته باشد که بردارهای $X_1(t_1), \dots, X_k(t_1)$ وابسته خطی باشند)