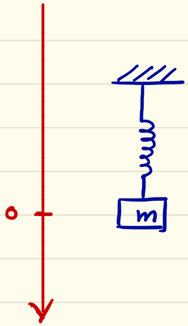
معادلات دیفرانسیل

جلسه سیزدهم

۱۴۰۰/۸/۱۵

مدل ارتعاشات فنر:



اگر به فنر با ثابت k جسمی به جرم m آویزان باشد و در حالت تعادل اختلاف طول فنر Δl باشد باید

$$k\Delta l = mg$$

حالت تعادل را مبدأ می‌گیریم و در زمان t نیروی $F(t)$ به جسم وارد می‌کنیم. $y(t)$ محل استقرار جسم در زمان t می‌نامیم

$$my'' = mg - k(\Delta l + y) - \underbrace{\gamma y'}_{\text{نیروی مقاومت هوا}} + F$$

$$\Rightarrow \quad my'' + \gamma y' + ky = F(t)$$

یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و ناهمگن است.

حالت اول: ارتعاشات آزاد $\gamma=0$ ، $F=0$

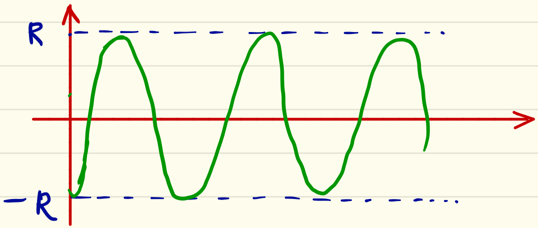
$$my''+ky=0$$

معادله مشخصه $mr^2+k=0 \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \quad y(t)=a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t$$

$$=R\cos(\omega_0 t-\delta)\quad , \quad R=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \tan\delta=b/a$$

مقادیر a و b از شرط اولیه معادله به دست می‌آیند. به هر حال با هر شرط اولیه‌ای جواب عمومی به صورت بالا است که یک تابع نوسانی با فرکانس ω_0 است. به همین دلیل ω_0 را فرکانس ذاتی این سیستم می‌نامیم.



حالت دوم: ارتعاشات آزاد میرا $F=0$ ، $\gamma>0$

$$my''+\gamma y'+ky=0$$

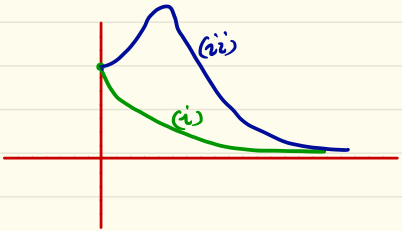
$$mr^2+\gamma r+k=0 \quad , \quad r_1,r_2=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4km}}{2m}$$

(i) $\gamma^2-4km>0$ در این حالت دو ریشه حقیقی متمایز r_1,r_2 داریم. به علاوه می‌دانیم $r_1,r_2<0$ و صورت عمومی جواب به صورت زیر است:

$$y(t)=ae^{r_1t}+be^{r_2t}\longrightarrow 0$$ وقتی $t\to\infty$

(ii) $\gamma^2-4km=0$ در این حالت $r_1=r_2=\frac{-\gamma}{2m}<0$ و جواب عمومی

$$y(t)=(a+bt)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\longrightarrow 0$$ وقتی $t\to\infty$

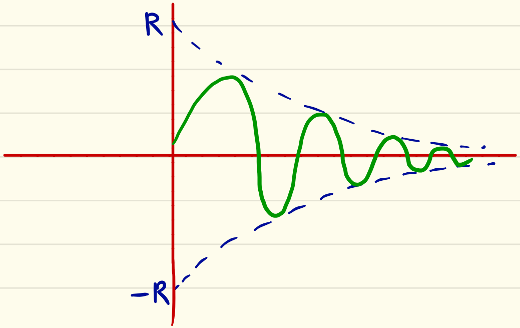


(iii) $\gamma^2 - 4km < 0$ و دو ریشه مختلط که $r_1, r_2 = -\frac{\gamma}{2m} + i\beta$

$$\beta = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}$$

$$y(t) = e^{-\gamma/2m\, t}\left(a\cos\beta t + b\sin\beta t\right) = Re^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\beta t - \delta)$$

$R = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\delta = b/a$



حالت سوم: ارتعاشات غیرآزاد $F(t) = F_0 \cos\omega t$, $\gamma > 0$

$$my'' + \gamma y' + ky = F_0 \cos\omega t$$

درحالتی که $\gamma > 0$ ، $\cos\omega t$ جواب معادله همگن نیست و حدس جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad -m\omega^2 (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \gamma\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$
$$+ k(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = F_0 \cos\omega t$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 A + B\gamma\omega + kA = F_0 \\ -m\omega^2 B - A\gamma\omega + kB = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{(k - m\omega^2)}{\gamma\omega} B$$

$$\Rightarrow \quad y_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

که $y_c(t)$ جواب عمومی معادله همگن است که در حالت دوم بدست آوردیم. همانطور که دیدیم

$$\lim_{t \to \infty} y_c(t) = 0$$

در نتیجه برای مقادیر بزرگ t ، $y(t)$ تقریباً برابر $y_p(t)$ است که با فرکانس ω نوسان می‌کند.

حالت چهارم: $F(t) = F_0 \cos \omega t$ ، $\gamma = 0$ $\qquad my'' + ky = F_0 \cos \omega t$

جواب عمومی معادله همگن مطابق بر حالت اول بصورت $\cos \omega_0 t$ و $\sin \omega_0 t$ است که $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

اگر $\omega_0 \neq \omega$ مشابه قبل جواب خصوصی بصورت

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

که با جایگذاری در مسئله به

$$y_p(t) = \frac{F_0 \cos \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}}$$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}} \cos \omega t$$

اگر $\omega = \omega_0$ ، آنگاه حدس جواب خصوصی به صورت

$$y_p(t) = t\,[\,A\cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t\,]$$

است . با جایگذاری در معادله و پیدا کردن ضرایب A و B به جواب خصوصی زیر می‌رسیم :

$$y_p(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_c(t) + y_p(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) + \underbrace{\frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t}_{\text{پدیده تشدید}}$$