معادلات دیفرانسیل

جلسه دوازدهم

۱۴۰۰/۸/۱۰

حالت دوم

$$g(t)=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)e^{\alpha t}$$

حدس معقول برای جواب خصوصی تابعی به صورت $y_p(t)=v(t)e^{\alpha t}$ است.

$$ay_p''+by_p'+cy_p=g \implies a\underbrace{(v''+2\alpha v'+\alpha^2 v)e^{\alpha t}}_{y_p''}+b\underbrace{(v'+\alpha v)e^{\alpha t}}_{y_p'}+cve^{\alpha t}=g$$

$$av''+(2a\alpha+b)v'+(a\alpha^2+b\alpha+c)v=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$$

تابع v باید در یک معادله ناهمگن درجه دو صدق کند که جمله ناهمگن یک چندجمله‌ای درجه n است. این دقیقاً همان حالت اول است که در جلسه قبل بحث کردیم. بنابراین

$$v(t)=\begin{cases} A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n & \text{اگر } a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0 \\ t(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n) & a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ 2a\alpha+b\neq 0 \\ t^2(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n) & a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ 2a\alpha+b=0 \end{cases}$$

درنتیجه

$$y_p=\begin{cases}(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t} & a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0\\ t(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t} & a\alpha^2+b\alpha+c=0\ ,\ 2a\alpha+b\neq 0\\ t^2(A_0+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t} & a\alpha^2+b\alpha+c=0\ ,\ 2a\alpha+b=0\end{cases}$$

شرط $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ معادل این است تابع $e^{\alpha t}$ جواب معادله همگن است.

و شرط سوم معادل این است که توابع $e^{\alpha t}$ و $te^{\alpha t}$ جوابهای معادله همگن هستند.

مثال– $y''-3y'+2y=(1+t)e^{3t}$

چندجمله‌ای مشخصه معادله همگن $r^2-3r+2=0$ که دارای دو ریشه $r_1=1$ و $r_2=2$ است. چون e^{3t} جواب معادله همگن نیست

پس حدس جواب خصوصی به صورت زیر است

$$y_p=(A_0+A_1t)e^{3t}$$

$$6A_1e^{3t}+9(A_0+A_1t)e^{3t}-3(A_1+3A_0+3A_1t)e^{3t}+2(A_0+A_1t)e^{3t}=(1+t)e^{3t}$$

با محاسبه A_0 و A_1 از روابط بالا شکل عمومی هم جوابهای معادله ناهمگن به صورت زیر است :

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + (A_0 + A_1 t)\, e^{3t}$$

مثال - $y'' - 3y' + 2y = (1+t)e^{2t}$

e^{2t} جواب معادله همگن است و te^{2t} جواب نیست . بنابراین

$$y_p = t(A_0 + A_1 t)\, e^{2t}$$

$$y_p' = (A_0 + 2A_1 t + 2tA_0 + 2A_1 t^2)\, e^{2t}$$

$$y_p'' = (2A_1 + 2A_0 + 4A_1 t + 2A_0 + 4(A_0 + A_1)t + 4A_1 t^2)\, e^{2t}$$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^{2t}\left[4A_0 + 2A_1 + 4(A_0 + 2A_1)t + \cancel{4A_1 t^2} - 3A_0 - 6(A_0 + A_1)t - \cancel{6A_1 t^2} + 2A_0 t + \cancel{2A_1 t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A_0 + 2A_1 = 1 \;, \quad -2A_0 + 2A_1 = 1$$

حالت سوم:

$$g(t)=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\times\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\cos\beta t+i\,e^{\alpha t}\sin\beta t$$

اگر تابع مختلط $u(t)+iv(t)$ را پیدا کنیم که در معادله زیر صدق کند:

$$(*)\qquad ay''+by'+cy=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{(\alpha+i\beta)t}$$

در این صورت u جواب خصوصی معادله

$$ay''+by'+cy=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\cos\beta t$$

است و همچنین v جواب خصوصی معادله اصلی است وقتی به جای $\cos\beta t$ داشته باشیم $\sin\beta t$.

جواب خصوصی (*) را مشابه حالت دوم می‌توان پیدا کرد.

اگر $\alpha+i\beta$ ریشه معادله‌ی مشخصه $ar^2+br+c=0$ نباشد، حدس جواب

$$u(t)+iv(t)=(C_0+C_1t+\cdots+C_nt^n)\,e^{(\alpha+i\beta)t}$$

که ضرایب نامعین $C_0, C_1, \ldots, C_n$ مختلط هستند. $C_k=A_k+iB_k$

$$\Rightarrow\quad u(t)=(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)\,e^{\alpha t}\cos\beta t-(B_0+B_1t+\cdots+B_nt^n)\,e^{\alpha t}\sin\beta t$$

حدس معقول برای معادله

$$ay''+by'+cy=(a_0+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\cos\beta t$$

اگر $\alpha+i\beta$ ریشه معادله‌ی مشخصه $ar^2+br+c=0$ باشد، $e^{\alpha t}\cos\beta t$ و $e^{\alpha t}\sin\beta t$ جواب‌های معادله همگن هستند

و برای پیدا کردن جواب خصوصی در حدس بالا t را ضرب می‌کنیم.

مثال- $y'' + 4y = \cos 2t$ ← معادله‌ی مشخصه $r^2 + 4 = 0$ ← $r = \pm 2i$

حدس جواب خصوصی $y_p = t\,[A_0 \cos 2t + B_0 \sin 2t]$

مثال- $y'' + 4y = e^{2t} \cos 2t$ ← حدس جواب $y_p = (A_0 \cos 2t + B_0 \sin 2t)\, e^{2t}$

مثال- $y'' + 2y' + y = t e^{t} \sin t$ معادله‌ی مشخصه ریشه‌ی تکراری -1 دارد و $1 \pm i$ ریشه‌ی آن نیست

$$y_p = [(A_0 + A_1 t)\sin t + (B_0 + B_1 t)\cos t]\, e^{t}$$

نکته - در بعضی از مسائل جواب خصوصی جمع یک سری توابع است که هر کدام در یکی از این سه حالت قبل صدق می کنند.

$$ay'' + by' + cy = g = g_1 + g_2 + \cdots + g_k$$

که هر کدام از g_i ها به صورت یکی از سه حالت

$$g_i = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\, e^{\alpha t} (\cos\beta t \quad \text{یا} \quad \sin\beta t)$$

$\alpha = 0 = \beta \leftarrow$ حالت اول

$\beta = 0 \,,\ \alpha \neq 0 \leftarrow$ حالت دوم

$\alpha \neq 0 \,,\ \beta \neq 0 \leftarrow$ حالت سوم

در این حالت جواب خصوصی معادله به صورت

$$y_p = y_p^1 + \cdots + y_p^k$$

که y_p^i جواب خصوصی متناظر g_i است.

مثال:

$$y''+y'+y = t+e^{t}+t\sin t$$

$$y_p = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y_1''+y_1'+y_1 = t \quad \xrightarrow{\text{حدس}} \quad y_1 = A_0 + A_1 t$$

$$y_2''+y_2'+y_2 = e^{t} \quad \longrightarrow \quad y_2 = B_0 e^{t}$$

$$y_3''+y_3'+y_3 = t\sin t \quad \longrightarrow \quad y_3 = (C_0 + C_1 t)\cos t + (D_0 + D_1 t)\sin t$$