معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

$$ay'' + by' + cy = 0$$

می‌دانیم مجموعه همه توابعی که در این معادله صدق کنند، یک فضای دو بعدی است و به دنبال

دو تابع مستقل برای پایه این فضا هستیم.

با حدس $y(t) = e^{rt}$ و جایگذاری در معادله، $y$ جواب معادله است اگر و تنها اگر

$$ar^2 + br + c = 0$$

حالت اول: چندجمله‌ای درجه ۲ فوق دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد. $r_1 \neq r_2$

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad , \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

و جواب عمومی به صورت

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

حالت دوم: چندجمله ای درجه ۲ فوق ریشه حقیقی ندارد و ریشه $\alpha \pm i\beta$ ریشه مختلط است.

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos\beta t \quad , \quad y_2(t) = e^{\alpha t} \sin\beta t$$

حالت سوم: چندجمله ای فوق ریشه تکراری دارد.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

$y_1(t) = e^{r_1 t}$ یک جواب معادله است. برای اینکه جواب عمومی را بنویسیم احتیاج

به جواب دیگری داریم که مستقل از $y_1$ باشد.

$$y_2(t) = e^{r_1 t}\,\varphi(t)$$

$$y_2' = r_1 e^{r_1 t}\varphi(t) + e^{r_1 t}\varphi'(t)$$

$$y_2'' = r_1^2 e^{r_1 t}\varphi + 2r_1 e^{r_1 t}\varphi' + e^{r_1 t}\varphi''$$

$$0 = a y_2'' + b y_2' + c y_2 = e^{r_1 t}\left[ a r_1^2 \varphi + 2 a r_1 \varphi' + a\varphi'' \right.$$

$$\left. + b r_1 \varphi + b\varphi' + c\varphi \right]$$

$$= e^{r_1 t}\left[ \underbrace{\cancel{(a r_1^2 + b r_1 + c)}}_{0}\varphi + \underbrace{\cancel{(2 a r_1 + b)}}_{0}\varphi' + a\varphi'' \right]$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = d_1 t + d_2$$

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = e^{r_1 t}\,(d_1 t + d_2) \qquad \text{برای هر } d_1, d_2$$

جواب معادله است که ترکیب دو تابع $te^{r_1 t}$ و $e^{r_1 t}$

جمع‌بندی: جواب عمومی در این حالت به صورت زیر است:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$

مثال- $0 = y'' + 4y' + 4y$ ، $y'(0) = y(0) = 1$

معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط $r^2 + 4r + 4 = 0$ است که دارای ریشه‌ی تکراری $r = -2$ است.

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی} \quad y_c(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

$$1 = y(0) = c_1 \quad , \quad 1 = y'(0) = -2c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 3$$

**نگاهی متفاوت :**

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0$$

$$L[e^{rt}] = (ar^2 + br + c)e^{rt}$$

درحالتی که چندجمله‌ای مشخصه ریشه‌ی تکراری دارد، داریم

$$ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2 \qquad r_1 = \frac{-b}{2a}$$

$$f(r) = L[e^{rt}] = a(r - r_1)^2 e^{rt}$$

$$f(r_1) = 0 \implies L[e^{r_1 t}] = 0$$

$$f'(r_1) = 0 \implies L[\underbrace{\frac{d}{dr} e^{rt}}_{te^{rt}}] = 0$$

## روش کاهش مرتبه

روشی که در قسمت قبل برای پیدا کردن $y_2$ گفتیم به روش کاهش مرتبه معروف است.

در این روش اگر معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

داشته باشیم و $y_1$ یک جواب این معادله باشد، آنگاه با قرار دادن $y_2(t) = y_1(t)\,\varphi(t)$ یک معادله مرتبه دوم خطی برای $\varphi$ به دست می‌آید که توابع ثابت $\varphi = c$ جواب آن معادله است.

$$y_2 = y_1 \varphi$$

$$y_2' = y_1' \varphi + y_1 \varphi'$$

$$y_2'' = y_1'' \varphi + 2 y_1' \varphi' + y_1 \varphi''$$

$$\Rightarrow 0 = y_2'' + p y_2' + q y_2 = \overset{0}{\cancel{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}} \varphi + (2y_1' + p y_1) \varphi' + y_1 \varphi''$$

چون $y_1$ جواب معادله است.

$$\Rightarrow \quad y_1 \varphi'' + (2y_1' + p y_1) \varphi' = 0$$

یک معادله مرتبه دو است که هر تابع ثابتی جواب آن است.

در واقع این معادله مرتبه اول برای مجهول $\varphi'$ است. به همین دلیل به این روش ،

روش کاهش مرتبه گفته می‌شود. به کمک روش‌های حل معادله خطی مرتبه اول داریم :

$$\varphi'(t) = \exp\left[-\int \left(2\underbrace{\frac{y_1'}{y_1}}_{2(\ln y_1)'} + p\right) dt\right]$$

$$= \frac{\exp\int -p\,dt}{y_1^2(t)}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \int^t \frac{\exp\int^s -p\,d\theta}{y_1^2(s)}\,ds$$

مثال- $(1-t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$

با دانستن اینکه $y_1(t) = t$ جواب معادله است به دنبال جواب دوم مستقل هستیم.

$$y_2(t) = t\varphi(t)$$

$$\Rightarrow (1-t^2)\left[2\varphi' + t\varphi''\right] + 2t\left[\varphi + t\varphi'\right] - 2t\varphi = 0$$

$$t(1-t^2)\varphi'' + \left(2(1-t^2) + 2t^2\right)\varphi' = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \frac{2}{t(1-t^2)}\varphi' = 0$$

$$\varphi'(t) = \exp\left[-\int^t \frac{2}{s(1-s^2)}\,ds\right]$$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$

در مطالب قبل دیدیم که اگر دو جواب $\Psi_1$ و $\Psi_2$ از معادله ناهمگن داشته باشیم

$$L[\Psi_1 - \Psi_2] = \underbrace{\cancel{L[\Psi_1]}}_{g} - \underbrace{\cancel{L[\Psi_2]}}_{g} = 0$$

اگر یک جواب از معادله ناهمگن $L[y] = g$ داشته باشیم که آن را با $y_p$

نشان دهیم، (و به آن جواب خصوصی می‌گوییم) تمام جوابهای معادله به صورت

$$y = y_c + y_p$$

خواهد بود که $y_c$ یک جواب معادله همگن است. $L[y_c] = 0$

اگر $y_1$ و $y_2$ جوابهای اساسی (پایه) جوابهای معادله همگن $L[y] = 0$

باشند، همه جوابهای معادله همگن به صورت

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

خواهد بود. به همین ترتیب همه جوابهای معادله ناهمگن به صورت زیراست.

$$y = \underbrace{(c_1 y_1 + c_2 y_2)}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{y_p}_{\text{جواب خصوصی}}$$

دو روش برای پیدا کردن جواب خصوصی ارائه می‌کنیم:

۱ـ روش تغییر پارامتر

۲ـ روش ضرایب نامعین (روش حدسی)