معادلات دیفرانسیل

جلسه نهم

۱۴۰۰/۷/۲۶

$$L[y] = y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y$$

در جلسه گذشته دیدیم که همه جواب‌های $L[y] \equiv 0$ یک فضای دو بعدی تشکیل می‌دهد (بدون در نظر گرفتن شرط اولیه)

اگر y_1 و y_2 یک پایه برای این فضا باشد که شرط پایه بودن معادل آن است

$$W[y_1, y_2; t_0] = \det \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

آنگاه هر جواب دیگری از $L[y] = 0$ یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 است. یعنی ثابت‌های c_1 و c_2 پیدا خواهند شد که

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

سؤال: اگر $\{y_1, y_2\}$ در شرط ناصفر بودن رونسکین در نقطه t_0 صدق کنند، آیا برای زمان‌های دیگر نیز این شرط برقرار است؟ اگر شرط اولیه را به جای نقطه t_0 نقطه t_1 بگیریم، لزوماً باید پایه را تغییر دهیم؟

<u>گزاره:</u> اگر توابع p و q در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند و y_1 و y_2 دو جواب $L[y]=0$ باشند، آنگاه $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ یا تابع ثابت صفر است یا همیشه $W(t) \neq 0$ برای $\alpha < t < \beta$.

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

$$\Rightarrow W' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1'y_2'} = y_1\left(-py_2' - \cancel{q}y_2\right) - \left(-py_1' - \cancel{q}y_1\right)y_2$$

$$= -p\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right) = -pW$$

$$\Rightarrow \quad W(t) = W(t_0)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right]$$

اگر $W(t_0)=0$ آنگاه برای همه مقادیر دلخواه t نیز داریم $W(t)=0$

یا به طور معادل اگر $W(t_0)\neq 0$ همیشه $W(t)\neq 0$

نکته- اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله باشند و $W[y_1,y_2](t)=0$ آنگاه یکی از دو جواب مضرب دیگری است.

$$W[y_1,y_2] = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{bmatrix} = 0$$

درنتیجه دستگاه خطی $\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$ جواب غیربدیهی دارد $(c_1,c_2)\neq(0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0 \\ c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=0 \end{cases}$$

در این صورت تابع $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ تابع صفر است. (بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب)

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \Rightarrow$$

اگر $c_1 \neq 0$ آنگاه

$$y_1 = \frac{-c_2}{c_1} y_2$$

و اگر $c_2 \neq 0$ آنگاه

$$y_2 = \frac{-c_1}{c_2} y_1$$

معادله خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} L[y] = ay'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \ , \ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

هدف: یک مجموعه اساسی $\{y_1, y_2\}$ برای معادله $ay'' + by' + cy = 0$ پیدا کنیم.

حدس: توابع $y(t) = e^{rt}$ را بررسی کنیم که به ازای چه مقادیری از r جواب معادله است.

$$L[e^{rt}] = (ar^2 + br + c)\, e^{rt}$$

e^{rt} جواب معادله است $\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \longrightarrow$ چندجمله‌ای مشخصه معادله گوییم

سه حالت زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

① دو ریشه حقیقی متمایز داریم.

② دو ریشه مختلط داریم.

③ ریشه تکراری داریم.

حالت اول: $r_1 \neq r_2$ دو ریشه متمایز حقیقی جدا از هم مشخص هستند.

درنتیجه $y_1 = e^{r_1 t}$ و $y_2 = e^{r_2 t}$ دو جواب مستقل برای معادله هستند.

هرچند بنابر نکته دو صفحه قبل می‌دانیم رونسکین y_1 و y_2 مخالف صفر است ولی مقدار آن را محاسبه می‌کنیم

$$W[e^{r_1 t}, e^{r_2 t}] = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$$

مثال- $y''+5y'+6y=0$ ، $y(0)=2$, $y'(0)=3$

$\hookleftarrow$ $r^2+5r+6=0 \Rightarrow r=-2,-3$. جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y(t)=c_1 e^{-2t}+c_2 e^{-3t}$$

با جایگذاری در شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را پیدا می کنیم.

$$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ -2c_1-3c_2=3 \end{cases} \Rightarrow c_1=9 ,\quad c_2=-7$$

$$\Rightarrow y(t)=9e^{-2t}-7e^{-3t}$$

در این حالت اگر دو ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه $ar^2+br+c=0$ منفی باشند ، جواب برای هر شرط اولیه در بی‌نهایت به صفر همگرا است

$$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

حالت دوم : دو ریشه‌ی مختلط $\alpha\pm i\beta$ داریم . $(\beta\neq 0)$

$$r_1=\alpha\pm i\beta \quad , \quad e^{r_1t}=e^{\alpha t\pm i\beta t}=e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\pm i\sin\beta t\right]$$

$$=u(t)\pm i\,v(t)$$

$$u(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t \quad , \quad v(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\left(e^{r_1t}\right)'=r_1e^{r_1t}$$

$$u'+iv'=(\alpha+i\beta)(u+iv)=(\alpha u-\beta v)+i(\beta u+\alpha v)$$

تمرین : $v'=\beta u+\alpha v \quad , \quad u'=\alpha u-\beta v$

همچنین $(e^{r_1 t})'' = r_1^2 e^{r_1 t}$ یعنی $u''+iv'' = (\alpha+i\beta)^2(u+iv)$

$$0 = ay''+by'+cy = a[u''+iv''] + b[u'+iv'] + c[u+iv]$$

$$= (au''+bu'+cu) + i(av''+bv'+cv)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} au''+bu'+cu=0 \\ av''+bv'+cv=0 \end{cases}$$

توابع $u(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$ و $v(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$ مستقل هستند (تمرین - رونسکین این دو تابع را محاسبه کنید)

مثال- $y''+y'+y=0$ ، $y(0)=y'(0)=1$

$r^2+r+1=0$ ← $r_1,r_2 = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

جواب عمومی: $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1=1$, $\quad y'(0) = -\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \Rightarrow c_2=\sqrt{3}$