معادلات دیفرانسیل

جلسه هشتم

۱۴۰۰/۷/۲۴

معادلات مرتبه دوم :

صورت کلی معادله مرتبه دوم

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 , \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

$$y'' = y + 1 \quad , \quad y'' = y' e^{y} + \sin y'$$

شکل عمومی معادله خطی مرتبه دوم :

$$L[y] := y'' + p(t) y' + q(t) y = g(t)$$

سمت چپ یک عملگر روی فضای توابع بنا می‌کند که عملگر خطی است.

$$y \longmapsto L[y] = y'' + p(t) y' + q(t) y$$

مثال -

$$\mathcal{L}[y] = y'' + y$$

$$\mathcal{L}[1] = 0 + 1 = 1$$

تابع ثابت یک

$$\mathcal{L}[t] = 0 + t = t$$

$$\mathcal{L}[t^2] = 2 + t^2$$

$\mathcal{L}$ خطی است هرگاه

$$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

$$\mathcal{L}[ry] = r\,\mathcal{L}[y] \qquad r \in \mathbb{R}$$

عملگر $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$ خاصیت خطی بودن را دارد.

معادله $L[y] = 0$ را همگن و معادله خطی $L[y] = g(t)$ ناهمگن گوییم.

خواص خطی بودن معادله :

① اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی همگن باشند، $L[y] = 0$ (بدون لحاظ کردن شرط اولیه) و c_1 و c_2 دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب است.

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1 \cancel{L[y_1]}_{0} + c_2 \cancel{L[y_2]}_{0} = 0$$

② اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی ناهمگن $L[y] = g$ باشند (بدون در نظر گرفتن شرط اولیه) آنگاه $y_1 - y_2$ جواب معادله همگن است.

$$L[y_1 - y_2] = 0$$

③ اگر y_1 جواب معادله همگن باشد و y_2 جواب معادله ناهمگن آنگاه $y_2 + cy_1$ جواب معادله ناهمگن است برای هر $c \in \mathbb{R}$.

$$L[y_2 + cy_1] = L[y_2] + c\underbrace{\cancel{L[y_1]}}_{0} = g$$

ایده اصلی حل معادله خطی مرتبه دوم با شرایط اولیه:

$$\begin{cases} L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \,, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن بدون در نظر گرفتن شرط اولیه را داشته باشیم، آنگاه مقادیر ثابت c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم به طوری که $y = c_1y_1 + c_2y_2$ در معادله و شرایط اولیه بالا صدق کند.

c_1 و c_2 باید در رابطه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

مقادیر c_1 و c_2 در صورتی می‌توانند پیدا شوند که دستگاه دو معادله دو مجهول (مجهولات c_1 و c_2) یک جواب داشته باشد

یا به طور معادل ماتریس ضرایب وارون‌پذیر باشد.

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0) \neq 0$$

رونسکین Wronskian

مثال- $y''+4y=0$ ، $y(0)=y'(0)=1$

$y_1(t)=\sin 2t$, $y_2(t)=2\sin 2t$ $\Rightarrow$ $W[y_1,y_2](t)=\det\begin{bmatrix}\sin 2t & 2\sin 2t\\ 2\cos 2t & 4\cos 2t\end{bmatrix}$

$$=4\sin 2t\cos 2t-4\sin 2t\cos 2t=0$$

با این توابع y_1 و y_2 امکان حل معادله را نداریم. ولی اگر به جای y_2 تابع $y_3(t)=\cos 2t$ انتخاب کنیم

$$W[y_1,y_3]=\begin{vmatrix}\sin 2t & \cos 2t\\ 2\cos 2t & -2\sin 2t\end{vmatrix}=-2\sin^2 2t-2\cos^2 2t=-2\neq 0$$

پس حتماً مقادیر c_1 و c_2 وجود دارند که $y(t)=c_1\sin 2t+c_2\cos 2t$ جواب معادله بالا باشد.

$$\begin{cases} y(0)=c_2=1\\ y'(0)=2c_1=1\end{cases} \Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\cos 2t$$

جمع‌بندی: برای حل معادله $\mathcal{L}[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0\ ,\ y'(t_0)=y'_0$

دو جواب y_1 و y_2 را پیدا می‌کنیم که

$$(*)\qquad W[y_1,y_2](t_0)\neq 0$$

آنگاه ضرایب c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم به طوری که $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ در شرایط اولیه صدق کند

بنابر فرمول کرامر:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0)\\ y'_0 & y'_2(t_0)\end{vmatrix}}{W(t_0)}=\frac{W[y,y_2](t_0)}{W[y_1,y_2](t_0)}$$

$$c_2=\frac{W[y_1,y](t_0)}{W[y_1,y_2](t_0)}$$

جواب‌های $\{y_1,y_2\}$ که در شرط $(*)$ صدق کنند را مجموعه جواب‌های اساسی معادله خطی $\mathcal{L}[y]=0$ گوییم و

فرم $y=c_1y_1+c_2y_2$ که در معادله $\mathcal{L}[y]=0$ صدق می‌کند را جواب عمومی این معادله می‌نامیم.

همچنین $\{y_1,y_2\}$ را پایه جواب‌های این معادله می‌نامیم

قضیه وجود و یکتایی جواب: اگر $p(t)$، $q(t)$ و $g(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ با شرط اولیه $y'(t_0) = y_0'$, $y(t_0) = y_0$ دقیقاً یک جواب دارد که در بازه $\alpha < t < \beta$ تعریف شده است.

$$z = y' \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = g(t) - q(t)y - p(t)z \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow X' = F(X, t) \rightsquigarrow \text{دستگاه معادله}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

مثال: $(t-1)y'' + y' + ty = 0$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ دارای جواب یکتا است در بازه $(-\infty, 1)$ است.

$$y'' + \frac{1}{t-1} y' + \frac{t}{t-1} y = 0$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{t-1}}_{p(t)} \qquad \underbrace{\tfrac{t}{t-1}}_{q(t)}$$

توابع p و q در $t=1$ ناپیوسته هستند.

نکته ـ اگر در قضیه وجود و یکتایی جواب $y_0 = 1$ و $y_0' = 0$ معادله دارای جواب یکتای y_1 است.

همچنین اگر $y_0 = 0$ و $y_0' = 1$ یک جواب یکتا داریم که با y_2 نشان می‌دهیم.

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

درنتیجه حتماً دو جواب مستقل برای معادله خطی مرتبه دوم همگن وجود دارد. هرچند لزومی ندارد برای حل معادله در حالت کلی این پایه را انتخاب کنیم. بلکه هر دو جوابی که در $(*)$ صدق کند، کفایت می‌کند.

سؤال: اگر $\{y_1, y_2\}$ مجموعه اساسی جواب‌ها باشند، چرا همه جواب‌ها به صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ قابل بیان است؟

درنتیجه مجموعه همه جواب‌های $L[y] = 0$ یک فضای برداری دوبعدی است که $\{y_1, y_2\}$ پایه این فضا است.