معادلات دیفرانسیل

جلسه هفتم

۱۴۰۰/۷/۱۹

قضیه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل:

فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول

(DE) $$y' = f(t,y) \qquad y(t_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

(IE) $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

بجای حل (DE) به دنبال جوابهای (IE) خواهیم بود.

$$\mathcal{L}[y](t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

فضای توابع پیوسته در بازه $[t_0-\alpha , t_0+\alpha]$ با $C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ نشان می‌دهیم.

$$\mathcal{L} : C[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \longrightarrow C[t_0-\alpha , t_0+\alpha]$$

جواب‌های معادله انتگرالی (IE) نقاط ثابت عملگر $\mathcal{L}$ هستند یعنی توابع y که

$$\mathcal{L}[y] = y$$

مثال- $f(t,y)=y$ که معادل معادله دیفرانسیل $y'=y$ است. اگر شرط اولیه $y(0)=1$ را در نظر بگیریم معادله انتگرالی زیر را خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[y](t) = 1+\int_0^t f(s,y(s))\, ds = 1+\int_0^t y(s)\, ds$$

اگر ورودی $\mathcal{L}$ تابع ثابت $z(t)\equiv 1$ باشد

$$\mathcal{L}[z](t) = 1+\int_0^t 1\, ds = 1+t$$

یا برای ورودی $x(t)\equiv t$ ، داریم

$$\mathcal{L}[x](t) = 1+\int_0^t x(s)\,ds = 1+\frac{1}{2}t^2$$

به علاوه $y(t)=e^t$ نقطه ثابت عملگر $\mathcal{L}$ است.

$$\mathcal{L}[y](t) = 1+\int_0^t e^s\,ds = 1+e^t-e^0 = e^t = y(t)$$

ایده اثبات وجود جواب: مقدار $\alpha>0$ وجود دارد که عملگر

$$\mathcal{L}: C[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \longrightarrow C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$$

انقباضی است و دنباله توابع زیر به نقطه ثابت $\mathcal{L}$ همگرا خواهد بود:

$$y_0(t)\equiv y_0$$

$$y_{n+1}(t)\equiv \mathcal{L}[y_n](t)$$

$$\mathcal{L}[y] = 1 + \int_0^t y(s)\,ds$$

مثال - در مثال قبل

$$y_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}[y_0(t)] = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1] = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2] = 1 + \int_0^t y_2(s)\,ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{1}{2}s^2\right) ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \longrightarrow y(t) = e^t$$

$y(0)=0 \quad , \quad y' = 2t\,(1+y)$ -Jlu

$$y(t) = \int_0^t 2s\,(1+y(s))\,ds$$

$$\mathcal{L}[y] := \int_0^t 2s\,(1+y(s))\,ds$$

$$y_0(t) \equiv 0 \quad , \quad y_1(t) = \mathcal{L}[y_0] = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1] = \int_0^t 2s\,(1+y_1(s))\,ds = \int_0^t 2s\,(1+s^2)\,ds = t^2 + \frac{1}{2}t^4$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2] = \int_0^t 2s\,(1+y_2(s))\,ds = \int_0^t 2s\,(1+s^2+\frac{1}{2}s^4)\,ds = t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6$$

$$y_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} \longrightarrow e^{t^2} - 1$$

در دو مثال قبل دنباله توابع y_n روی $\mathbb{R}$ تعریف شده اند و به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ به جواب معادله همگرا می شوند. در مثال زیر این اتفاق در یک بازه محدود می افتد.

مثال- $\quad y' = y^2 \quad , \quad y(0) = 1$

$$\mathcal{L}[y] = 1 + \int_0^t (y(s))^2\, ds$$

$$y_0(t) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \mathcal{L}[y_0] = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1] = 1 + \int_0^t (1+s)^2\, ds = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2] = 1 + \int_0^t \left(1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds = 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9} + \frac{t^7}{63}$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1-t}$$

همگرایی در بازه $|t| < 1$

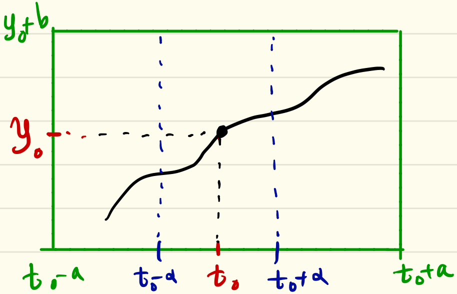
قضیه: فرض کنید تابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل

$$R=\{(t,y): \ |t-t_0|\le a \ , \ |y-y_0|\le b\}$$

پیوسته هستند. اگر

$$\alpha=\min\left(a,\frac{b}{M}\right) \ , \quad M=\max_{(t,y)\in R}|f(t,y)|$$

آنگاه معادله $y'=f(t,y)$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ دارای جواب یکتا در بازه $|t-t_0|\le\alpha$ است.



مثال- $y'=y$ ، $y(0)=1$.

$f(t,y)=y$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در هر مستطیل $R=[-a,a]\times[1-b,1+b]$ به ازای هر a و b دلخواه پیوسته است.

$$M=\max_{R}|f(t,y)| = 1+b$$

قضیه وجود جواب می‌گوید جواب این معادله در بازه $t\in[-\alpha,\alpha]$ تعریف شده است که

$$\alpha=\min\left(a,\frac{b}{1+b}\right)$$

چون a و b دلخواه هستند پس α هر عددی کوچکتر از یک می‌تواند باشد و معادله در بازه $-1<t<1$ جواب یکتا دارد.

مثال- $y' = 2t(1+y)$ ، $y(0)=0$

$f(t,y) = 2t(1+y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $R=[-a,a]\times[-b,b]$ پیوسته هستند.

$$M = \max_R |f| = 2a(1+b)$$

قضیه وجود و یکتایی جواب تضمین می‌کند که جواب معادله در بازه $t\in[-\alpha,\alpha]$ تعریف شود که

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{2a(1+b)}\right) \le \min\left(a, \frac{1}{2a}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

هرچند جواب معادله برای $-\infty < t < \infty$ تعریف شده است ولی قضیه وجود جواب تنها بازه $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ را ارائه می‌کند.

نکته - معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y' + p(t)y = q(t)$ به صورت

$$y' = f(t,y) = q(t) - p(t)y$$

بیان می‌شود. شرط پیوستگی f و $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(t)$ معادل این است که $p(t)$ و $q(t)$ هر دو پیوسته باشند.

اگر ضرایب $p(t)$ و $q(t)$ در $|t-t_0| \leq a$ پیوسته باشند، آنگاه شرط قضیه وجود جواب

برای مستطیل

$$R = [t_0-a, t_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$$

به ازای هر b دلخواه برقرار است.

$$M = \max_R |f| \leq \max_{|t-t_0|\leq a} |q(t)| + (b+|y_0|) \cdot \max_{|t-t_0|\leq a} |p(t)|$$

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{\cdots}\right)$$

اگر هـ ـط ، مقدار حدی α برابر است با

$$\alpha = \min\left(a, \frac{1}{\max|p(t)|}\right)$$

که برای بعضی توابع p می‌تواند از a کوچکتر باشد. در حالی که در حالت قبل دیدیم که معادلات خطی مرتبه اول تا زمانی که p و q پیوسته باشند، جواب آنها تعریف می‌شود. (یعنی $|t-t_0| \le a$)

تمرین - می‌دانیم جواب $y' = y^2$ ، $y(0) = 1$ برابر $y(t) = \frac{1}{1-t}$ است که در بازه $t < 1$ تعریف شده است. به کمک قضیه وجود و یکتایی بدون حل معادله بازه وجود جواب را به دست آورید.