معادلات دیفرانسیل

جلسه ششم

۱۴۰۰/۷/۱۷

معادلات دقیق (Exact)

ایده اصلی: جواب رابطه $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t,y)\right) = 0$

عبارتی $\varphi(t,y) = C$ است که C یک مقدار ثابت است.

مقدار C را از روی شرط اولیه می‌توان حساب کرد.

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,y(t)) = \varphi_t + \varphi_y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

تعریف - معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(t,y)+N(t,y)\,y' = 0$ را دقیق گوییم هرگاه توابع M و N به صورتی باشند که

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

برای یک تابع φ. در اینصورت جواب معادله به صورت $\varphi(t,y) = C$ خواهد بود.

مثال- $1+\cos(t+y)+\cos(t+y)\,y'=0$ ، $y(0)=\pi$

$$y'=-\frac{1}{\cos(t+y)}-1$$

یک معادله دقیق است که به صورت

$$\frac{d}{dt}\left(t+\sin(t+y)\right)=0$$

می‌باشد. جواب آن به صورت زیر است:

$$t+\sin(t+y)=c$$

با جایگذاری شرط اولیه $y(0)=\pi$ داریم $c=\sin\pi=0$

نکته- اگر معادله $M+Ny'=0$ دقیق باشد باید

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

قضیه- اگر $M(t,y)$ و $N(t,y)$ در مستطیل $a<t<b$ و $c<y<d$ پیوسته باشند و

مشتقات آنها نسبت به t و y نیز پیوسته باشد، دراینصورت معادله دیفرانسیل

$$M(t,y)+N(t,y)y'=0$$

دقیق است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

چگونه تابع φ را به دست بیاوریم؟

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow \varphi(t,y) = \underbrace{\int^{t} M(s,y)\, ds}_{\text{یک تابع اولیه برای } M \text{ نسبت به } t} + h(y)$$

تابع $h(y)$ را پیدا می‌کنیم به طوری که رابطه دوم برقرار باشد

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int^{t} \underset{\frac{\partial N}{\partial t}}{\frac{\partial M}{\partial y}}\, ds + h'(y)$$

$$\underbrace{N(t,y) - \int^{t} \frac{\partial N}{\partial t}\, ds}_{\text{یک تابع اولیه } \frac{\partial N}{\partial t}} = h'(y)$$

در نتیجه عبارت سمت چپ وابسته به t نیست.

لذا می‌توان تابع h را پیدا کرد.

$y(0)=1 \qquad \underbrace{(y\cos t+2te^{y})}_{M}+\underbrace{(\sin t+t^{2}e^{y}-1)}_{N}y'=0$ — مثال

$$M=\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,,\qquad N=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

شرط دقیق بودن:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos t+2te^{y}\,,\qquad \frac{\partial N}{\partial t}=\cos t+2te^{y}$$

$$\varphi(t,y)=\int^{t}M(y,s)\,ds+h(y)=\int^{t}y\cos s+2se^{y}\,ds+h(y)$$

$$=y\sin t+t^{2}e^{y}+h(y)$$

$$\sin t+t^{2}e^{y}-1=N=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\sin t+t^{2}e^{y}+h'(y)\Rightarrow h'(y)=-1$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = -y + c \quad \Rightarrow \quad \varphi(t,y) = y\sin t + t^2 e^y - y + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\varphi(t,y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\sin t + t^2 e^y - y = C$$

با جایگذاری شرط اولیه $y(0)=1$ باید $C=-1$.

مثال-

$$\underbrace{3y+e^{t}}_{M} + \underbrace{(3t+\cos y)}_{N}\frac{dy}{dt}=0$$

$$M=\frac{\partial \varphi}{\partial t}\ ,\qquad N=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3=\frac{\partial N}{\partial t}=3 \Rightarrow$$ معادله دقیق است و تابع φ وجود دارد که روابط بالا برقرار باشد

$$\varphi(t,y)=\int^{y} N(t,z)\,dz + h(t) = 3ty+\sin y+h(t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=3y+h'(t)=M=3y+e^{t}$$

$$\Rightarrow\quad h'(t)=e^{t} \Rightarrow h(t)=e^{t}$$

بنابراین به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(3ty+\sin y+e^{t}\right)=0$$

نکته - در اکثر مواقع معادله $M + Ny' = 0$ دقیق نیست $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ ولی با ضرب کردن معادله

در تابع $\mu(t,y)$ ، معادله دقیق می‌شود. در این صورت تابع μ را عامل انتگرال‌ساز گوییم.

$$M + Ny' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu M + \mu N y' = 0$$

μ را باید پیدا کنیم به طوری که :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \mu}{\partial t} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \qquad (*)$$

با فرض‌های مناسب معادله $(*)$ را ساده کرده و تابع μ را پیدا می‌کنیم.

حالت اول: μ تابعی از t باشد. $\Leftarrow$ $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$

$$-N\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N}$$

در این حالت باید $\frac{M_y - N_t}{N}$ تابعی از t باشد. در اینصورت μ جواب یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

مثال- $\underbrace{\frac{y^2}{2} + 2ye^t}_{M} + \underbrace{(y+e^t)}_{N}\, y' = 0$

$M_y = y + 2e^t \quad , \quad N_t = e^t \Rightarrow M_y \neq N_t \Rightarrow$ معادله دقیق است.

$$\frac{M_y - N_t}{N} = \frac{y + 2e^t - e^t}{y + e^t} = 1$$

$\rightsquigarrow$ می‌توان آن را به عنوان تابعی از t در نظر گرفت.

در نتیجه عامل انتگرال‌گیر μ در معادله $\frac{\mu_t}{\mu} = 1$ باید صدق کند.

$$\Rightarrow \quad \mu(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2}e^t + 2ye^{2t} + (ye^t + e^{2t})y' = 0$$

که معادله دقیق است.

تمرین ـ معادله دقیق بالا را حل کنید.

حالت دوم: μ تابعی از y است. $\Leftarrow$ $\mu_t = 0$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_t - M_y}{M}$$

عبارت $\frac{N_t - M_y}{M}$ باید تابعی از y باشد.

مثال ـ در مثال قبل عبارت $\frac{N_t - M_y}{M} = -\frac{y + e^t}{y^2/2 + 2ye^t}$ که به (t, y) وابسته است. لذا به حالت دوم نمی‌توان آن را حل کرد.

حالت سوم: μ تابعی از $y+t$ باشد. $\mu=\mu(y+t)$

$$\mu_t=\mu_y=\mu'(y+t)$$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_t-M_y}{M-N}$$

درصورتی می‌توان عامل انتگرال‌گیری به صورت بالا پیدا کرد که عبارت

$$\frac{N_t-M_y}{M-N}$$

تابعی از $y+t$ باشد.

تمرین ـ در معادله $(*)$ تابع μ را به صورت $\mu=\mu(yt)$ درنظر بگیرید و نشان دهید چه رده‌ای از معادله مرتبه اول با این عامل انتگرال‌گیری قابل حل هستند.

مثال- $\underbrace{(2y+t)}_{M} - \underbrace{(2t+y)}_{N}y' = 0$

$M_y = 2 \quad , \quad N_t = -2 \implies$ معادله دقیق نیست

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_t - M_y}{M - N} = \frac{-4}{3(y+t)}$$

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{-4}{3z} \implies \mu(z) = z^{-4/3}$$

در نتیجه

$$\implies (y+t)^{-4/3}(2y+t) - (y+t)^{-4/3}(2t+y)\,y' = 0$$

یک معادله دقیق است.