# معادلات دیفرانسیل

جلسه چهارم ۱۴۰۰/۷/۱۰

گزاره- اگر در معادله خطی مرتبه اول ناهمگن $y' + p y = q$ توابع $p$ و $q$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه معادله با شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ دارای جواب یکتایی است که در (3) صدق می‌کند به علاوه دامنه تعریف جواب حداقل بازه $(\alpha, \beta)$ است.

مثال- $t y' + 2y = 4t^2$ با شرط اولیه $y(1) = 2$ دامنه تعریف جواب چیست؟

$$\Rightarrow \quad y' + \underset{p}{\frac{2}{t}} y = \underset{q}{4t}$$

ضرایب معادله (توابع $p$ و $q$) در بازه $(0, \infty)$ پیوسته هستند. بنابر گزاره بالا جواب معادله حداقل در بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است.

$$\mu y' + \frac{2\mu}{t} y = 4t\mu$$

$$\mu' = \frac{2\mu}{t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|\mu| = \frac{2}{t} \Rightarrow \mu(t) = t^2$$

$$(t^2 y)' = t^2 y' + 2ty = 4t^3 \Rightarrow t^2 y(t) = y(1) + \int_1^t 4s^3\, ds$$

$$= 2 + t^4 - 1 = t^2 + 1$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^4+1}{t^2}$$

درنتیجه جواب درنقطه $t=0$ پیوسته نیست.

نکته- شرط پیوستگی ضرایب $p$ و $q$ لازم است نه کافی. یعنی ممکن است ضرایب ناپیوسته باشند ولی معادله جواب در بازه بزرگتر داشته باشد.

مثال- $y' + \frac{1}{1-t} y = 0$ با شرط اولیه $y(0)=1$.

تنها نقطه ناپیوستگی $p(t) = \frac{1}{1-t}$ نقطه $t=1$ است. بنابر گزاره قبل دامنه تعریف جواب مسئله بازه $(-\infty, 1)$ است. اما اگر معادله را حل کنیم به جواب زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{dt} \ln|y| = \frac{-1}{1-t} = \frac{d}{dt} \ln|1-t| \Rightarrow y(t) = 1-t$$

و این جواب برای هر $t \in (-\infty, \infty)$ در معادله صدق می‌کند.

## معادلات جدایی‌پذیر

به کمک روش حل معادله $y'+p(t)y=0$ می‌توان صورت کلی‌تری از معادلات به شکل

$$y'+p(t)f(y)=0$$

را حل کرد.

$$\frac{y'}{f(y)}=-p(t)$$

اگر تابع $F(y)$ وجود داشته باشد که

$$\frac{d}{dy}F(y)=\frac{1}{f(y)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(F(y(t))\right)=\frac{d}{dy}F(y)\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{y'}{f(y)}=-p(t)$$

$$\Rightarrow \quad F(y(t)) = F(y(t_0)) - \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

$$y(0) = -1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 - 4t + 2}{2(y-1)}$$

-مثل

$$f(y) = \frac{1}{2(y-1)} \quad , \quad p(t) = -3t^2 + 4t - 2$$

$$F(y) = (y-1)^2 \Rightarrow \frac{d}{dy}(y-1)^2 = \frac{1}{f(y)} = 2(y-1)$$

$$2(y-1)y' = 3t^2 - 4t + 2$$

$$\frac{d}{dt}(y-1)^2 = 3t^2 - 4t + 2 \Rightarrow (y(t)-1)^2 - 4 = \int_0^t 3s^2 - 4s + 2\, ds$$

$$= t^3 - 2t^2 + 2t$$

تعریف معادله جداپذیر: اگر با ساده سازی معادله به صورت

$$y' g(y) = p(t)$$

در بیاید، که در یک طرف تساوی تنها به متغیر $t$ وابسته است و سمت دیگر $y$، آن را معادله جداپذیر گوییم.

اگر $G(y) = \int^{y} g(u)\,du$ تابع اولیه $g$ باشد و $P(t) = \int^{t} p(s)\,ds$ تابع اولیه $p$ باشد، آنگاه

جواب معادله به صورت

$$G(y(t)) - G(y(t_0)) = P(t) - P(t_0)$$

خواهد بود.

مثال - $\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$ ، $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt \implies \tan^{-1} y(t) - \tan^{-1} y(0) = \int_0^t ds = t$$

$$\implies y(t) = \tan t$$

مثال- $yy' + (1+y^2)\sin t = 0$ ، $y(0)=1$

$$\frac{yy'}{1+y^2} = -\sin t \qquad g(y) = \frac{y}{1+y^2}\,, \quad p(t) = -\sin t$$

$$\Rightarrow \int_1^y \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int_0^t -\sin t\,dt$$

$$G(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

$$P(t) = \cos t$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \frac{1}{2}\ln 2 = \cos t - 1$$

$$\ln(1+y^2) = 2\cos t + \ln 2 - 2$$

$$1+y^2 = \exp(2\cos t + \ln 2 - 2)$$

$$y(t) = \pm\left[-1 + \exp(2\cos t + \ln 2 - 2)\right]^{1/2}$$

بنابر شرط اولیه فقط قسمت مثبت جواب مسئله است.

نکته- در بعضی مواقع معادله در ابتدا جداپذیر نیست ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن را جداپذیر کرد.

مثال- $\frac{dy}{dt} = \frac{y-4t}{t-y}$ با تغییر متغیر $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ به معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{dy}{dt} = z + t\frac{dz}{dt} = \frac{tz-4t}{t-tz} = \frac{z-4}{1-z}$$

$$t\frac{dz}{dt} = \frac{z^2-4}{1-z} \Rightarrow \frac{1-z}{z^2-4}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}$$

که یک معادله جداپذیر است

نکته- اگر معادله دیفرانسیل به صورت $\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{y}{t}\right)$ باشد، همیشه با تغییر متغیر $z = y/t$ می‌توان به یک معادله جداپذیر رسید.

$$tz' = F(z) - z$$

مثال-
$$\frac{dy}{dt}=\frac{2y-t+5}{2t-y-4}$$

سمت راست به صورت $F(\frac{y}{t})$ نیست. ولی با یک تغییر متغیر می‌توانند به این شکل در بیاید.

$$\begin{cases} y=Y-\alpha \\ t=T-\beta \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dT}=\frac{2(Y-\alpha)-(T-\beta)+5}{2(T-\beta)-(Y-\alpha)-4}$$

$$=\frac{2Y-T+(-2\alpha+\beta+5)}{2T-Y+(-2\beta+\alpha-4)}$$

اگر $\alpha$ و $\beta$ به گونه‌ای انتخاب شوند که
$$\begin{cases} -2\alpha+\beta+5=0 \\ \alpha-2\beta-4=0 \end{cases}$$
آن‌گاه سمت راست معادله

به صورت $F(\frac{Y}{T})$ خواهد بود.

$$Z=\frac{Y}{T}$$

$$T\frac{dZ}{dT} + Z = \frac{2Z-1}{2-Z}$$

$$\left|\frac{Z-1}{(Z+1)^3}\right| = C\,T^2$$ به عنوان تمرین نشان دهید

که ثابت $C$ به شرط اولیه معادله وابسته است.

$$Y(T) = T\,Z(T)$$

$$y(t) = (t+\beta)\,Z(t+\beta) - \alpha$$