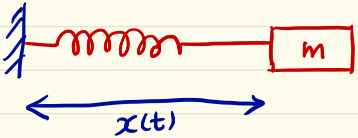
معادلات دیفرانسیل

جلسه اول

۱۴۰۰/۶/۲۷

درشکل ساده از معادلات دیفرانسیل



$x(t)$ میزان تغییر طول فنر در زمان t

k ثابت فنر

نیروی وارد بر فنر $= k\,x(t)$

با فرض نبودن اصطکاک می‌دانیم که شتاب حرکت جسم فوق از قانون دوم نیوتن با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\underset{\text{جرم}}{m}\,\underbrace{x''(t)}_{\text{شتاب}} = k\,x(t)$$

رابطه بالا یک معادله را بیان می‌کند که مجهول آن تابع $x(t)$ است و این رابطه برحسب تابع و مشتقات آن بیان شده است.

هدف از بیان این رابطه پیدا کردن تابع $x(t)$ است. برای حل این معادله مقدار تابع $x(t)$ در لحظه شروع آزمایش $t=0$ مهم است. حتی اگر به جای مقدار $x(0)$ تابع را در زمان t_0 بشناسیم، می‌توانیم با ابزار معادلات دیفرانسیل تابع $x(t)$ را پیدا کنیم. مقدار $x(t_0)$ را مقدار اولیه (شرط اولیه) معادله می‌نامیم.

اگر جسم در حرکت اصطکاک داشته باشد با ثابت μ، آنگاه نیروی اصطکاک برابر

$$\underbrace{\mu x'(t)}_{\text{سرعت}}$$

به سمت راست معادله اضافه می‌شود.

$$mx'' = kx + \mu x'$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را ارائه می‌کند.

مثال (سقوط آزاد) : جسمی را در ارتفاع h رها کردیم، قصد داریم سرعت جسم را در زمانهای مختلف به دست آوریم.

اگر $v(t)$ سرعت در لحظه t باشد،

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = \underbrace{m \cdot g}_{\text{نیروی گرانش}} - \underbrace{\mu v}_{\text{نیروی اصطکاک}}$$

این معادله دیفرانسیل را با شرط اولیه $v(0) = v_0$ حل خواهیم کرد.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل به شکل زیر است:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0$$

که یک رابطه‌ای بین تابع $y:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ و مشتقات آن بیان شده است.

مثلاً رابطه $F(t,y,y',y'') = my'' - Ky - \mu y' = 0$ معادله دیفرانسیل ضدضربه‌ی مبل
را نشان می‌دهد.

$$F(t,y,z,x) = mx - Ky - \mu z$$

بالاترین ترتیب مشتق که در معادله ظاهر می‌شود را مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم. معادله بالا یک معادله مرتبه دوم است.

مثال- $F(t,y,y',y'') = \sin y'' + e^{-t}y + (y')^2 = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است.

از قضیه تابع ضمنی در ریاضی ۲ می‌دانیم که از معادله

$$F(t,y,x,z) = \sin z + e^{-t}y + x^2 = 0$$

می‌توانیم تحت شرایطی متغیر z را برحسب (t,y,x) بیان کنیم. در رابطه بالا به سادگی می‌توان z را به صورت زیر نوشت:

$$z = \sin^{-1}\left(-e^{-t}y - x^2\right)$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل بالای صفحه (F = 0) به شکل زیر نیز بیان می‌شود:

$$y'' = \sin^{-1}\left(-e^{-t}y - (y')^2\right)$$

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$ درحالت کلی معادله دیفرانسیل

را صورت کلاسیک معادله دیفرانسیل مرتبه m می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل

جلسه دوم

۱۴۰۰/۶/۲۹

معادله مرتبه اول :

فرم کلی : $F(t, y, y') = 0$

فرم کلاسیک : $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

ساده‌ترین شکل معادله : $\frac{dy}{dt} = f(t) \quad (1)$

جواب این معادله یک تابع اولیه برای $f(t)$ است .

$$y(t) = \int^t f(s)\, ds$$

اگر معادله بالا همراه با شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ داده شده باشد ، آنگاه

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + y_0 \quad (2)$$

بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشتق $y(t)$ برابر $f(t)$ است (y جواب معادله است)
اگر تابع f در نقطه t پیوسته باشد.

به علاوه جواب این معادله یکتا است، یعنی هر جواب (1) با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ به صورت (2)
خواهد بود. زیرا هر جواب (1) یک تابع اولیه $f(t)$ است و می‌دانیم توابع اولیه تنها با یک مقدار ثابت
اختلاف دارند (یعنی اگر y_1 و y_2 دو تابع اولیه f باشند، مقدار ثابت c وجود دارد که

$$(y_1(t)-y_2(t)=C$$

اگر y_1 و y_2 در شرط اولیه $y_1(t_0)=y_2(t_0)=y_0$ صدق کنند، آنگاه باید $C=0$

و در نتیجه $y_1(t)=y_2(t)$ برای هر t.

مثال - (مسأله سقوط آزاد)

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{\mu}{m} v \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

g, μ, m ثابت هستند.

حالت $\mu = 0$ مثال قبل است و جواب به صورت

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} g \, ds + v_0 = v_0 + (t - t_0) g$$

است.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv/dt}{g - \mu/m \, v} = 1$$

$$y(t) := \ln \left| g - \mu/m \, v(t) \right| \times \left(-\frac{m}{\mu}\right) \Rightarrow g - \frac{\mu}{m} v(t) = \exp\left(-\frac{\mu}{m} y(t)\right)$$

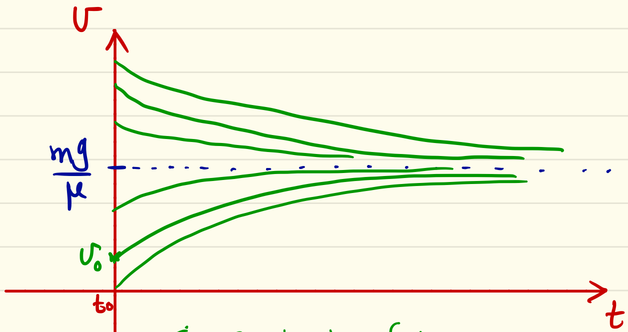
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\mu/m}{g - \mu/m \, v} \cdot \frac{dv}{dt} \times \left(-\frac{m}{\mu}\right) = 1$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} 1 \, ds + y(t_0) = t - t_0 - \frac{m}{\mu} \ln \left| g - \frac{\mu}{m} v_0 \right|$$

$$v(t) = \frac{m}{\mu}\left[g - \exp\left(-\frac{\mu}{m}\left(t - t_0 - \frac{m}{\mu}\ln\left|g - \frac{\mu}{m}v_0\right| \right)\right) \right]$$

$$= \frac{mg}{\mu} - \frac{m}{\mu}\left|g - \frac{\mu}{m}v_0\right|^{-m/\mu} \exp\left(-\frac{\mu}{m}(t-t_0)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$$



جواب‌های معادله برای مقادیر مختلف v_0

که همگی به جانب mg/μ میل خواهند کرد.

معادله خطی مرتبه اول :

(3) $$\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = q(t)$$

تمرین - اگر توابع p و q ثابت باشند، آنگاه مشابه مثال قبل مسأله را حل کنید.

$$\frac{dy/dt}{q - Py} = 1$$

عملگر دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$\mathcal{L} : \{$همه توابع مشتق‌پذیر$\} \longrightarrow \{$همه توابع$\}$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{dy}{dt} + p(t)\,y$$

مثال- $\mathcal{L}[y] = y' + \sin t \, y$

$$\mathcal{L}[\cos t] = -\sin t + \sin t \cos t$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \cos t + (\sin t)^2$$

$$\mathcal{L}[1] = \sin t$$

تابع ثابت یک

تعریف- عملگر $\mathcal{L}$ را خطی گوییم هرگاه :

- $\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$

بازای هردو تابع y_1 و y_2

- $\mathcal{L}[ry] = r\,\mathcal{L}[y]$

بازای هرتابع y و عدد ثابت $r \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}[y] = y' + p(t)\,y$$

اکنون بررسی می‌کنیم که عملگر دیفرانسیلی
یک عملگر خطی است.

- $$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)' + p\,(y_1 + y_2)$$

$$= (y_1' + p\,y_1) + (y_2' + p\,y_2)$$

$$= \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

- $$\mathcal{L}[ry] = (ry)' + p\,(ry) = r(y' + p\,y) = r\,\mathcal{L}[y]$$

معادله (3) به صورت

$$\mathcal{L}[y] = q(t)$$

بیان می‌شود و هدف از حل این معادله پیدا کردن تابع y است که تحت عملگر $\mathcal{L}$ به تابع مشخص q برود.

تعریف ـ وقتی $q \equiv 0$ است ، معادله $\mathcal{L}[y] = 0$ که آن را معادله همگن گوییم.
در مقابل وقتی q یک ناصفر است معادله را ناهمگن گوییم.