بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: کوئیز شماره ۴ (شنبه ۱۰ خرداد ۹۳)

شماره دانشجویی:

۱- الف) شعاع مدار n ام اتم هیدروژن (r_n) و انرژی الکترون در این مدار (E_n) را با استفاده از نظریه بوهر بدست آورید. (ب) نشان دهید که $E_n r_n$ همواره مقداری است ثابت.

۲- مقدار انتظاری انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کل اتم هیدروژن در حالت پایه را بیابید. ویژه حالت پایه اتم هیدروژن برابر است با $\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$ که a_0 شعاع بوهر است.

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

سوال ۱ (۲نمره)

① $\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow mv^2 = \frac{ke^2}{r}$ (۰/۲۵)

$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) $L = mrv \longrightarrow m^2v^2r^2 = L^2 \xrightarrow{①^2 \text{ در جایگذاری}} r = \frac{m^2v^2r^2}{mke^2} = \frac{L^2}{mke^2}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) $L = n\hbar \longrightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$ (۰/۲۵)

$E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} \longrightarrow E_n = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{n^2\hbar^2}\, mke^2 = -\frac{1}{2}\frac{mk^2e^4}{n^2\hbar^2}$ (۰/۲۵)

$r_n E_n = -\frac{1}{2}ke^2$ (۰/۲۵)

سوال ۲

$\langle V \rangle = \langle -\frac{ke^2}{r} \rangle = \frac{-ke^2}{\pi a_0^3} \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{-4ke^2}{a_0^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r\, dr$ (۱۵)

$\int_0^\infty e^{-\beta r} r\, dr = -\frac{d}{d\beta}\int_0^\infty e^{-\beta r} dr = \frac{-d}{d\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta r}\right)_0^\infty = \frac{-d}{d\beta}\beta^{-1} = \beta^{-2}$

$\rightarrow \langle V \rangle = \frac{-ke^2}{a_0}$ (۱۵)

سوال ۲

$$\langle E_{kin} \rangle = \langle \frac{P^2}{2m} \rangle = \int \psi^* \underbrace{\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2\right)}_{(۱/۵)} \psi \, dv = \frac{-\hbar^2}{2m\pi a_0^3} \int e^{-r/a_0} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) e^{-r/a_0} \, dv$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2m\pi a_0^3} \left\{ \int_0^\infty e^{-r/a_0} \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{2}{r a_0}\right) e^{-r/a_0} \, 4\pi r^2 dr \right\}$$

$$= \frac{-\hbar^2 4\pi}{2m\pi a_0^3} \left\{ \frac{1}{a_0^2} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} \, dr - \frac{2}{a_0} \int_0^\infty r e^{-2r/a_0} \, dr \right\}$$

$$= \frac{-2\hbar^2}{m a_0^3} \left\{ \frac{1}{a_0^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \int_0^\infty e^{-\beta r} \, dr + \frac{2}{a_0} \frac{d}{d\beta} \int_0^\infty e^{-\beta r} \, dr \right\} \quad ; \quad \beta = 2/a_0$$

$$= \frac{-2\hbar^2}{m a_0^3} \left\{ \frac{1}{a_0^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{2}{a_0} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\beta}\right) \right\} = \frac{-2\hbar^2}{m a_0^3} \left\{ \frac{1}{a_0^2} 2\beta^{-3} - \frac{2}{a_0} \beta^{-2} \right\}$$

$$= \frac{-2\hbar^2}{m a_0^3} \left\{ \frac{2}{a_0^2} \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 - \frac{2}{a_0} \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \right\} = \frac{-2\hbar^2}{m a_0^3} \left\{ \frac{a_0}{4} - \frac{a_0}{2} \right\} = \frac{\hbar^2}{2m a_0^2} \qquad (۱۵)$$

$$\langle E_{total} \rangle = \langle E_{kin} \rangle + \langle V \rangle \qquad (۱/۵)$$

بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی:

کوئیز شماره ۴ (دوشنبه ۱۲ خرداد ۹۳)

شماره دانشجویی:

۱- نشان دهید چگالی احتمال حضور الکترون در حالت پایه اتم هیدروژن در $r = a_0$ بیشینه می‌شود، در حالیکه مقدار انتظاری (میانگین) شعاع در حالت پایه برابر است با $\frac{3a_0}{2}$.

ویژه حالت پایه اتم هیدروژن برابر است با $\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$ که a_0 شعاع بوهر است.

۲- انرژی پس‌زنی اتم هیدروژن وقتی فوتونی از تراز $n = 10$ به حالت پایه گسیل می کند را بدست آورید.

سوال ۱

احتمال حضور الکترون $P(r)\,dV = |\psi_{10}(r)|^2 dV = \frac{e^{-2r/a_0}}{\pi a_0^3} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr$ (۱۵)

$\frac{d}{dr}\left(\frac{4r^2 e^{-2r/a_0}}{a_0^3}\right) = \frac{8r}{a_0^3} e^{-2r/a_0}\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{r = a_0}$ (۱۵)

$\langle r \rangle = \int_0^\infty \psi^* r \psi \, dV = \frac{1}{\pi} a_0^3 \int_0^\infty r e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_0} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{3a_0}{2}$ (۱)

سوال ۲

(۱۵)

$n=10$ — $h\nu$ — $n=1$ $\quad P_{fi} = 0$ $\quad E_{10} - E_1 = 13.6\,ev\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{10^2}\right) = 0.99 \times 13.6\,ev = 13.464\,ev = h\nu$

$n=10$ — $P_{\text{فوتون}} = h\nu'$ → $n=1$ — $P_{\text{اتم}} \neq 0$

پایستگی تکانه $|P_{\text{اتم}}| = h\nu'/c$ (۱۲۵)

پایستگی انرژی $E_{10} = E_1 + h\nu' + \frac{P_{\text{اتم}}^2}{2M}$ (۱۲۵) $\longrightarrow h\nu' + \frac{h^2\nu'^2}{2Mc^2} - h\nu = 0$

$\nu' = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4\,h^3\nu/2Mc^2}}{\frac{h^2}{Mc^2}} = 4,011 \times 10^{-19} \longrightarrow \nu' \ll \nu = 3,24 \times 10^{15}$

← می‌توان از تغییرات فرکانس در اثر پس‌زنی اتم صرف‌نظر کرد (۱۵)

انرژی پس‌زنی $= \frac{P_{\text{اتم}}^2}{2M} = \frac{h^2\nu'^2}{2M} = \begin{cases} 9,66 \times 10^{-8}\,ev \\ 1.5477 \times 10^{-26}\,j \end{cases}$ (۱۵)