تشکیل ساختار غیرخطی: رمبش کروی I

در تشکیل ساختار خطی به بررسی تحول تباین چگالی در فضای فوریه δ_k پرداختیم و طیف توان ماده را $P_\delta(k)$ محاسبه کردیم. از آن جایی که معادلات خطی، امکان جداسازی مُدهای متفاوت فوریه را به ما می‌دهد، بررسی رشد ساختارها در فضای فوریه Fourier Space با معنا است. البته با رشد تباین چگالی در طول موج λ، $\delta(\lambda) \gtrsim 1$ تباین چگالی بزرگتر از واحد خواهد بود و احتیاج به تشکیل ساختار غیرخطی داریم.

رشد ساختارها (تباین چگالی) در جهان ماده تاریک غالب $\Omega_m \simeq 1$ با عامل مقیاس scale factor است

از این رو در زمانی $t > t_{nl}$ تباین چگالی بزرگتر از واحد خواهد بود.

برای این که رشد ساختارها را بررسی کنیم. ناحیه کروی با تباین چگالی $\delta > 0$ در نظر می‌گیریم.

در خارج ناحیه فراچگال، چگالی زمینه را داریم که با آهنگ انبساط هابل H_b رشد می‌کند.

$\delta = 0 , K = 0$

$\delta > 0 , K > 0$ (H_s , ρ_s)

(H_b , ρ_b)

$$H_b^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b$$

ρ_b چگالی پس زمینه است (با فرض جهان تخت)

در این صورت سرعت انبساط هابل در ناحیه فراچگال کمتر $H_s < H_b$ خواهد بود و شبیه آن است که ناحیه فراچگال برابر جهان FRW با خمش مثبت است.

$$H_s^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_s - \frac{K}{a^2}$$

حال می‌توانیم تقریبی از تباین چگالی به دست آوریم:

$$\delta(x,t) = \frac{\rho_s(x,t) - \rho_b(t)}{\rho_b(t)} = \frac{\frac{3}{8\pi G}\left(H_s^2 + \frac{K}{a^2}\right) - \frac{3}{8\pi G} H_b^2}{\frac{3}{8\pi G} H_b^2}$$

$$= \frac{H_s^2 + \frac{K}{a^2} - H_b^2}{H_b^2} \underset{H_s \simeq H_b}{\simeq} \frac{K}{a^2 H_b^2} \simeq K \dot{a}^{-2}$$

"با این فرض که در زمان اولیه آهنگ انبساط ناحیه فراچگال با پس زمینه یکسان است"

حال اگر جهان ماده تاریک غالب در نظر بگیریم:

$$\dot{a}^{-2} \propto t^{2/3} \quad \text{در نتیجه} \Leftarrow \quad a(t) \sim t^{2/3}$$

همان انتظاری که داشتیم تباین چگالی با عامل مقیاس رشد می‌کند.

$$\boxed{\delta \propto a(t)}$$

نکته جالب این است که همین استدلال ساده می‌تواند نشان دهد که تباین چگالی ماده باریونی، به تنهایی برای ایجاد ساختار غیرخطی ($\delta \gtrsim 1$) در جهان کفایت نمی‌کند.

زیرا در $z_{CMB} \sim 10^3$ ، تباین چگالی ماده باریونی $\delta_b \sim 10^{-5}$ می‌باشد. در نتیجه

$$\frac{\delta_b(z=0)}{\delta_b(z=z_{CMB})} = \frac{a(z=0)}{a(z=z_{CMB})} = 1 + z_{CMB} \rightarrow \delta_b(z=0) \simeq 10^3 \times 10^{-5} \sim 10^{-2}$$

از این رو دامنه اختلاف دمای تابش پس زمینه کیهان و وجود ساختارهای غیرخطی در جهان نشانی از وجود ماده تاریک است.

از آن جایی که شکل ساختار غیرخطی مدهای فوریه را نمی‌توان از هم جدا کرد، در این گستره با تباین چگالی در فضای حقیقی کار خواهیم کرد.

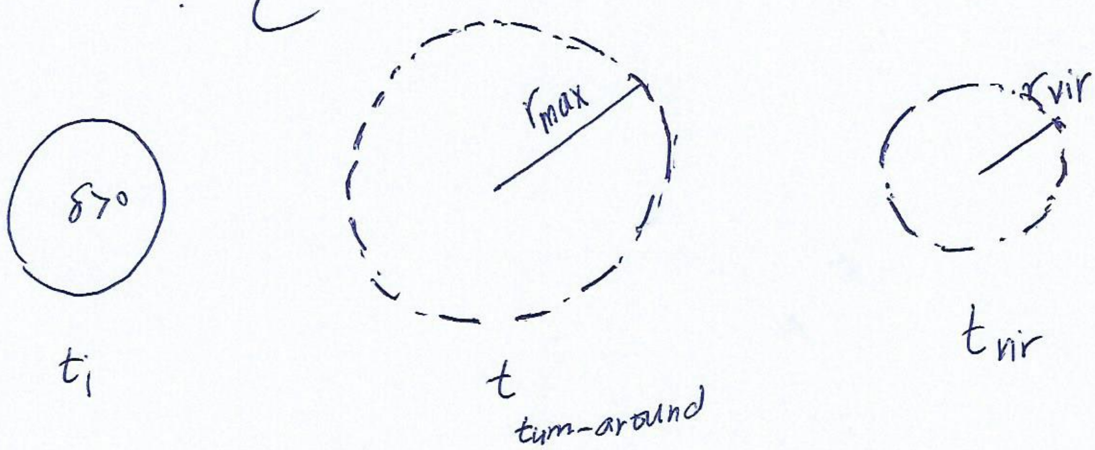
فرض کنید در زمان t_i میدان $\delta_i(\vec{x}, t)$ وجود داشته باشد، این بدین معناست که نواحی از کیهان $\delta > 0$ (فراچگال) و نواحی دیگر (فروچگال) است $\delta < 0$.

حال هدف بررسی نواحی فراچگال و تحول آن در کیهان منبسط شونده است. هر ناحیه‌ی فراچگال تحت گرانش خود تمایل به رمبیدن گرانشی Gravitational Collapse دارد.

برای ماده باریونی یا تاریک صرفاً رقابت نیروی گرانش، انبساط کیهان وجود دارد که نظریه رمبش کروی روشی است برای بررسی دینامیک مورد بحث Gunn, J. E., Gott, J. R. III, 1972, ApJ, 176, 1.

انتظار این است که نواحی با تباین چگالی به اندازه کافی مثبت می‌توانند رمبش کنند و ساختار مقید گرانشی تشکیل دهند

در مرحله اول ناحیه فراچگال با سرعت کندتری نسبت به پس‌زمینه منبسط می‌شود، سپس به مرحله turn around می‌رسد که انبساط این ناحیه متوقف شده و در مرحله سوم ساختار شروع به رمبش می‌کند.



نکته مهم این است که ساختار به صورت کامل فرو نمی‌ریزد و تشکیل تکینگی نمی‌دهد بلکه به شعاع ویریالی می‌رسد که چگونگی به دست آوردن آن را توضیح خواهیم داد!

جزئیات رشد گرانشی بستگی به توزیع تباین چگالی اولیه دارد. همان گونه که فرض کردیم ساده ترین توزیع، توزیع کروی Top-hat Model را حول یک نقطه انتخاب می کنیم.

$$\delta(x,t_i) = \begin{cases} \delta & x \le R_i \\ 0 & x > R_i \end{cases}$$

R_i : شعاع اولیه ناحیه فراچگال است.

$$\rho(r,t_i) = \rho_b(t_i) + \delta\rho(r,t_i) = \rho_b(t_i)\left[1+\delta_i(r)\right]$$

زمان اولیه — چگالی زمینه — تباین چگالی اولیه

که $\delta_i(r) \equiv \delta(r,t_i)$ تابع ثابت با فاصله R است.

حال به طول موج های محدود میکنیم که در داخل افق باشد $\lambda \ll d_H$ (طول افق)، R طول نوری که تباین چگالی مهم است از طول افق بسیار کوچکتر است.

از این رو می توان از مکانیک نیوتنی برای بررسی تحول این ساختار استفاده کرد. برای بررسی از طول فیزیکی proper radial coor. استفاده می کنیم. $r = a(t)|x|$ که x طول همراه است.

دینامیک ناحیه فراچگال با پتانسیل گرانشی مربوط است که:

$$\phi_{tot}(r,t) = \phi_b(r,t) + \delta\phi(r,t)$$

پتانسیل گرانشی کل

ϕ_b پتانسیل گرانشی FRW است که می توان آن را با یک تغییر متغیر به صورت زیر بدست آورد.

FRW-metric for flat Universe: $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \right]$

که با تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را به صورت زیر نوشت: (تمرین: رابطه زیر را نشان دهید)

$$ds^2 \cong c^2 \left(1 + \frac{2\phi_b(t,x)}{c^2} \right) dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

که

$$\phi_b(x,t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) r^2 \qquad \underline{r = a\chi \quad \text{طول فیزیکی}}$$

درنتیجه

$$\phi_{tot}(r,t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) r^2 + \delta\phi(r,t) = \frac{2\pi}{3} G \rho_b r^2 + \delta\phi(r,t)$$

با استفاده از معادله فریدمن

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_b$$

$\delta\phi$ تنها پتانسیل گرانشی است که به دلیل تباین چگالی مثبت $\delta\rho$ تولید شده است و حل دینامیک ناحیه فراچگال به شعاع $r = r(t)$ با معادله نیوتن به شکل زیر داده می‌شود.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi_{tot} = -\frac{4\pi G \rho_b(t)}{3}\vec{r} - \vec{\nabla}(\delta\phi) = -\frac{GM_b}{r^3}\vec{r} - \underbrace{\frac{G\,\delta M(r,t)}{r^3}\vec{r}}$$

با این فرض نوشته شده است که در توزیع متقارن ماده، نیروی گرانشی فقط بستگی به δM در ناحیه فراچگال دارد.

$$M_b = \frac{4\pi}{3}\rho_b(t) r^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_b(t) a^3(t) x^3 = \text{Constant};$$

$$\delta M(r,t) = 4\pi \int_0^r \delta\rho(q,t) q^2 dq = 4\pi \rho_b(t) \int_0^r q^2 \delta(q,t) dq$$

در روابط بالا فرض بر این است که اگر ناحیه کروی را به پوسته‌های به شعاع $r_1, r_2, \dots$ به طوری که $r_1 < r_2 < \dots$ باشد
پس از تحول این ترتیب تغییر نکند. به معنا دیگر گذر پوسته Shell Crossing اتفاق نیافتد.

جرم داخل پوسته ثابت است.

$$\delta M(r,t) = \delta M(r_i, t_i) = cte$$

$$* \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$; که M جرم کل است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M = \rho_0 \left(\frac{4\pi}{3} r_i^3\right)\left(1 + \bar{\delta}_i\right)$$

که $$\bar{\delta}_i = \frac{3}{4\pi r_i^3} \int_0^{r_i} \delta_i(r)\, 4\pi r^2\, dr$$

r_i: طول اولیه فیزیکی

$\bar{\delta}_i$: average value of δ_i up to radius r_i at time t_i

$$\xrightarrow{\text{رابطه * - انتگرال گیری}} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E$$

که E ثابت انتگرال گیری است.

علامت E (که انرژی سیستم است.) مشخص می‌کند که ناحیه به فروپاشی خواهد رسید یا خیر؟ در صورتی که $E>0$ باشد $\frac{dr}{dt}$ هیچ گاه به صفر نمی‌رسد، در نتیجه به فروپاشی نخواهد رسید. در حالتی که $E<0$ باشد، با افزایش r، $\dot{r}$ به صفر میل خواهد کرد و از شعاعی به بعد $\dot{r}$ منفی خواهد شد، که نشان دهنده رمبش است.

حال برای بررسی این دینامیک، فرض کنید در t_i، تباین چگالی را بسیار کوچک در نظر بگیریم و از سرعت خاص ماده نیز صرف نظر کنیم، در نتیجه

$$\dot{r}_i = \frac{\dot{a}}{a} r_i = \underbrace{H(t_i)}_{\text{پارامتر هابل در زمان اولیه}} r_i = H_i r_i$$

در نتیجه انرژی جنبشی اولیه برابر خواهد بود:

$$K_i \equiv \left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right)_{t=t_i} = \frac{H_i^2 r_i^2}{2}$$

انرژی پتانسیل در زمان اولیه برابر خواهد بود با:

$$U = -|U|$$

$$|U| = \frac{GM}{r}\Big|_{t=t_i} = G\,\frac{4\pi}{3}\,\rho_b(t_i)\, r_i^2\,(1+\bar{\delta}_i)$$

$$= \frac{1}{2} H_i^2\, r_i^2\, \Omega_i\,(1+\bar{\delta}_i) = K_i\,\Omega_i\,(1+\bar{\delta}_i)$$

انرژی جنبشی اولیه

$$\text{with} \quad \Omega_i = \frac{\rho_b(t_i)}{\rho_c(t_i)} \;, \qquad \frac{8\pi G}{3}\,\rho_c(t_i) = H_i^2(t)$$

پارامتر چگالی در زمان initial

چگالی بحرانی کیهان در زمان t_i

در نتیجه انرژی کل پوسته SHELL برابر خواهد بود با:

$$\boxed{E = K_i - K_i\Omega_i(1+\bar{\delta}_i) = K_i\Omega_i\left[\Omega_i^{-1} - (1+\bar{\delta}_i)\right]}$$

حال شرط رمبش $E<0$ متناسب خواهد بود با

$$E<0 \rightarrow 1+\bar{\delta}_i > \Omega_i^{-1}$$

در کیهان تخت و بسته $\Omega_i \geq 1$ ($\Omega_i^{-1} \leq 1$) برای هر تباین چگالی مثبت $\bar{\delta}_i > 0$ این اتفاق خواهد افتاد. در کیهان باز $\Omega_i < 1$، ناحیه فراچگال باید از حد بحرانی تباین چگالی بیشتری داشته باشد. حال فرض کنید میدان تباین چگالی $\delta(r)$ موجود باشد. نواحی که شعاع آن به حد بحرانی برسد به قسمی که $\bar{\delta}_i(r_{cr}) = \Omega_i^{-1} - 1$، این نواحی خواهند رمبید.

حال فرض کنید که پوسته ای از ماده وجود داشته باشد که در حال رمبش باشد $(E<0)$

می توان شعاع ماکزیمم r_m را به سادگی با فرض $\dot{r}\big|_{r=r_m}=0$ به دست آورد.

$$E = -\frac{GM}{r_m} = -\frac{r_i}{r_m}\underbrace{\frac{GM}{r_i}}_{K_i\Omega_i(1+\bar{\delta}_i)} \rightarrow E = -\frac{r_i}{r_m}K_i\Omega_i(1+\bar{\delta}_i)$$

طبق تعریف انرژی پتانسیل : $K_i\Omega_i(1+\bar{\delta}_i)$

حال با برابر قرار دادن رابطه بالا با تعریف انرژی خواهیم داشت

$$E = K_i\Omega_i\left[\Omega_i^{-1} - (1+\bar{\delta}_i)\right]$$

$$\boxed{\frac{r_m}{r_i} = \frac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)}}$$

حال اگر $\bar{\delta}_i \geq \Omega_i^{-1} - 1$ در این صورت $r_m \gg r_i$ بدین معنی که اگر تباین چگالی اولیه نزدیک مقدار بحرانی باشد، شعاع بیشینه بسیار بزرگتر از شعاع اولیه خواهد بود.

معادله تحول شعاع در زمان رمبش را می توان از انتگرال گیری رابطه

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E$$

به شرط $E<0$ به دست آورد. جواب رابطه پاسخی به شکل پارامتری خواهد بود.

$$\begin{cases} r = A(1-\cos\theta) \\ t+T = B(\theta-\sin\theta) \\ A^3 = GMB^2 \end{cases}$$

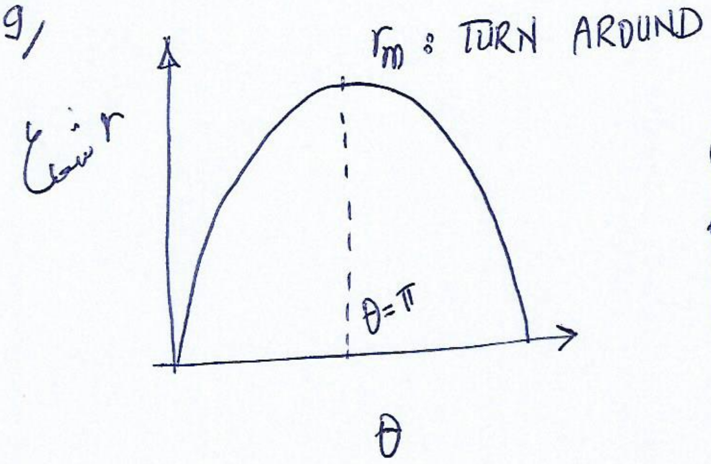
θ پارامتر مسئله $\theta\in[0,2\pi]$

زمان t به صورت یکنوا افزایش می یابد.

r به مقدار بیشینه می رسد و سپس رمبش می کند.

T ثابت اولیه است که اجازه خواهد بود در $t=t_i$ ؛ $r=r_i$

9/



$$\begin{cases} \theta=\pi \rightarrow r_m = 2A & (1) \\ \text{و از طرف دیگر} \quad \dfrac{r_m}{r_i} = \dfrac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)} & (2) \end{cases}$$

از ترکیب روابط (۱) , (۲)

$$\xrightarrow{\text{از ترکیب روابط (1), (2)}} \boxed{A = \frac{r_i}{2} \cdot \frac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)}}$$

حال برای به دست آوردن ثابت B ، با استفاده از تعریف

$$\begin{cases} M = \rho_b \left(\frac{4\pi}{3} r_i^3\right)(1+\bar{\delta}_i) \\ A^3 = GMB^2 \end{cases}$$

$$B^2 = \frac{\left[\left(\frac{r_i}{2}\right)(1+\bar{\delta}_i)\right]^3}{\left[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)\right]^3 G \underbrace{\rho_b \frac{4\pi}{3}}_{\frac{1}{2}H_i^2\Omega_i} r_i^3 (1+\bar{\delta}_i)}$$

$H(t_i) = H_i$

$\frac{1}{2} H_i^2 \Omega_i = \frac{4\pi}{3} \rho_b$

در نتیجه

$$\rightarrow \boxed{B = \frac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}\left[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)\right]^{\frac{3}{2}}}}$$

ثابت T را با استفاده از شرط $r\Big|_{t=t_i} = r_i$ مشخص می‌شود.

□ بطور مثال برای جهان تخت خواهیم داشت:

$$A = \frac{r_i}{2}\cdot\frac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \; ; \; B = \frac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\,\bar{\delta}_i^{3/2}}$$

زمان اولیه

$$\begin{cases} r = \dfrac{r_i}{2}\,\dfrac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i}\left(1-\cos\theta\right) \quad (1) \quad \theta=\theta_i \; ; \\ t+T = \dfrac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\,\bar{\delta}_i^{3/2}}\left(\theta-\sin\theta\right) \quad (2) \end{cases}$$

با قرار دادن $\delta=\delta_i \rightarrow$

$$2\bar{\delta}_i = (1+\bar{\delta}_i)(1-\cos\theta_i) \rightarrow \cos\theta_i = \frac{1-\bar{\delta}_i}{1+\bar{\delta}_i}$$

از آنجایی که در زمان اولیه δ_i کوچک است

$$\cos\theta_i \cong 1-2\delta_i \rightarrow \theta_i^2 \cong 4\delta_i \; *$$

حال با جایگذاری در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$H_i(t_i+T) = (1+\bar{\delta}_i)\,\frac{1}{2\bar{\delta}_i^{3/2}}\left(\theta_i-\left(\theta_i-\frac{\theta_i^3}{6}+\dots\right)\right)$$

$$= (1+\bar{\delta}_i)\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\underbrace{\left(\frac{\theta_i}{\sqrt{\delta_i}}\right)}_{2}^{3}+\dots\right)$$

با توجه به رابطه *

$$\rightarrow H_i(t_i+T) = \frac{2}{3}(1+\delta_i)$$

برای جهان ماده تاریک خالص $H_i t_i = \frac{2}{3}$ در نتیجه

$$H_i T = \frac{2}{3}\delta_i$$

در نتیجه:

$$T/t_i = \delta_i \ll 1$$

از این رو در ادامه محاسبات می‌توان از T در جواب رشد کروی صرف نظر کرد.

به طور مشابه برای کیهان های $\Omega_i \neq 1$ تا زمانی که $\delta_i \ll 1$ باشد، می‌توان از T صرف نظر کرد.

در نتیجه:

$$\begin{cases} r = A(1-\cos\theta) \\ t + T = B(\theta - \sin\theta) \\ A^3 = GMB^2 \end{cases} + \quad A = \frac{r_i}{2}\frac{1+\bar{\delta}_i}{\left[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)\right]}$$

$$B = \frac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}\left[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$T \to 0$$

روابط فوق اطلاعات کامل تحول پوسته با تباین چگالی مثبت را به دست می دهد. به طور مثال می‌توان تحول ابتدایی را با چگالی متوسط بررسی کرد.

$$\bar{\rho}(t) = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3 (1-\cos\theta)^3}$$

حتی در صورتی که تباین چگالی، ناحیه را چگال ثابت باشد "Top-hat profile" در این صورت تحول این ناحیه نیز به صورت فوق می باشد.

حال برای به دست آوردن تباین چگالی $\bar{\delta}(r,t)$، می بایست تحول چگالی پس‌زمینه را نیز بررسی کرد.

در کیهان تخت $k=0$، ماده غالب خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{k=0\ ,\ \Omega_i = 1} \quad a \propto t^{2/3} \quad ; \qquad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b(t) \quad (1)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{2}{3}t^{-1/3}}{t^{2/3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),\,(2)} \quad \frac{4}{9t^2}\cdot\frac{3}{8\pi G} = \rho_b(t) \longrightarrow \boxed{\rho_b(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}}$$

حال، تقسیم چگالی متوسط به چگالی زمینه، خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{\rho}(r,t)}{\rho_b(t)} = 1 + \bar{\delta}(r,t) = \frac{3M}{4\pi A^3}\,\frac{6\pi G B^2(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3}$$

Since $A^3 = GMB^2$ it follows: $\boxed{\bar{\delta} = \frac{9}{2}\cdot\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1}$

حال تحول تباین چگالی متوسط را می توان در گستره خطی در زمان های کوچک بدست آورد

$$t \to 0 \Rightarrow \theta \to 0 \quad \begin{cases} t \approx \dfrac{B\theta^3}{6} \\[2ex] \bar{\delta} \approx \dfrac{3}{20}\theta^2 \quad * \end{cases}$$

*بسط تا مرتبه ۳ در زاویه

$$\bar{\delta} \cong \frac{9}{2}\,\frac{\left[\cancel{\theta} - \left(\cancel{\theta} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\right)\right]^2}{\left[\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}\right)\right]^3} - 1 \approx \frac{9}{2}\,\frac{\frac{\theta^6}{36}}{\frac{\theta^6}{8}}\cdot\frac{\left[1 - \theta^2/20\right]^2}{\left[1 - \frac{\theta^2}{12}\right]^3} - 1$$

$$\cong (\cancel{1} - 2\,\theta^2/20)(\cancel{1} + 3\,\theta^2/12) - \cancel{1} \approx 3\,\theta^2/12 - 2\,\theta^2/20 \approx \frac{3}{20}\theta^2$$

۱. در تقریب خطی :

$$\begin{cases} t \approx \dfrac{B\theta^3}{6} \\[2ex] \bar{\delta} \approx \dfrac{3\theta^2}{20} \end{cases} \xrightarrow{\text{از حذف } \theta \text{ در روابط}} \begin{cases} \bar{\delta} = \dfrac{3}{20}\left(\dfrac{bt}{B}\right)^{2/3} \\[2ex] B \approx \dfrac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}\left[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1}-1)\right]^{3/2}} \end{cases}$$

حال ثابت B به صورت زیر است

for flat Universe $\Omega_i = 1$; $H_i = \dfrac{2}{3t_i}$ $\Rightarrow B = \dfrac{3}{4}\dfrac{t_i}{\bar{\delta}_i^{3/2}}(1+\bar{\delta}_i)$

حال با جاگذاری B در رابطه قبلی چگالی خواهیم داشت :

$$\bar{\delta} = \frac{3}{5}\bar{\delta}_i\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} \propto a(t)$$

این تابع رشد به دست آمده از زمان کوچک، دقیقاً تابع رشد خطی است.

□ حال برای بررسی تحول زمانی ناحیه‌ی چگال و ارتباط آن به انتقال به سرخ اولیه و زمان "turn-around" از تقریب‌ها و متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم.

در جهان تخت
where $\begin{cases} \Omega_i = 1 \\ H_i = \dfrac{2}{3t_i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{r_i}{2}\dfrac{1+\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \\[2ex] B = \dfrac{1+\bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}\bar{\delta}_i^{3/2}} \end{cases} \xrightarrow{\text{مرتبه اول } \bar{\delta}} \begin{cases} A \simeq \dfrac{r_i}{2\bar{\delta}_i} \\[2ex] B \simeq \dfrac{3t_i}{4\bar{\delta}_i^{3/2}} \end{cases}$

حال به جای r_i و $\bar{\delta}_i$ از دو کمیت x و δ_0 استفاده می‌کنیم.

$$x = r_i\,\frac{a(t_0)}{a(t_i)} \quad \text{"Comoving radius"}$$

$$\bar{\delta}_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_i)}\,\frac{3}{5}\,\delta_i = \frac{3}{5}\,\delta_i\,(1+z_i)$$

δ_0 مقدار تباین چگالی در زمان حال است، که توسط نظریه خطی پیش بینی می‌شود.

در صورتی که در انتقال به سرخ z_i، تباین چگالی δ_i باشد. زیرا

$$\left.\begin{aligned}\delta_0 &= D(a_0)\,\delta_{initial}\\ \delta_i &= D(a_i)\,\delta_{initial}\end{aligned}\right\} \quad \frac{\delta_0}{\delta_i} = \frac{a_0}{a_i} = \frac{a(t_0)}{a(t_i)}$$

ضریب $\frac{3}{5}$ را بعد نشان خواهیم داد! (در درس نامه دوم)

حال بر حسب x و δ_0؛ ضرایب A و B برابر خواهند بود با (از این به بعد علامت Bar متوسط گیری را حذف می‌کنیم)

$$A = \frac{3x}{10\,\delta_0} \quad ; \quad B = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \frac{3t_0}{4\,\delta_0^{3/2}}$$

حال می‌توان تحول ناحیه فراچگال را بر حسب متغیرهای جدید بنویسیم.

$$\begin{cases} r(t) = \dfrac{r_i}{2\delta_i}(1-\cos\theta) = \dfrac{3x}{10\,\delta_0}(1-\cos\theta) \\[2ex] t = \dfrac{3t_i}{4\,\delta_i^{3/2}}(\theta-\sin\theta) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{3t_0}{4\,\delta_0^{3/2}}(\theta-\sin\theta) \\[2ex] \bar{\rho}(t) = \rho_b(t)\,\dfrac{9(\theta-\sin\theta)^2}{2(1-\cos\theta)^3} \rightarrow \delta = \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{(\theta-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1 \end{cases}$$

حال می‌توان ارتباط بین انتقال به سرخ z مربوط به زمان t و z_i (انتقال به سرخ اولیه مربوط به t_i) را از رابطه $\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} = \frac{1+z_i}{1+z}$ به دست آورد. (با این فرض که در کیهان ماده تاریک غالب هستیم)

$$1+z = \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_i(1+z_i)}{(\theta-\sin\theta)^{2/3}} = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_0}{(\theta-\sin\theta)^{2/3}}$$

- رابطه فوق، ارتباط ضمنی، انتقال به سرخ و پارامتر کمکی θ را مشخص می‌کند و با θ مشخص شده، با جایگذاری در رابطه روبرو تباین چگالی را محاسبه می‌کنیم

$$\delta(z) = \delta = \frac{9}{2}\,\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1$$

برای مقایسه در گستره خطی تباین چگالی خطی در انتقال به سرخ z برابر خواهد بود با

$$\delta_L = \frac{\bar{\rho}_L}{\rho_b} - 1 = \frac{3}{5}\,\frac{\delta_i(1+z_i)}{1+z} = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\theta - \sin\theta)^{2/3} = \delta_L(z)$$

حال دقت نظریه خطی را می‌توانیم با مقایسه $\delta_L(z)$ و $\delta(z)$ بیابیم.

- برای $z \gg 1 \leftarrow \theta \ll 1$ و در نتیجه $\delta(z) \simeq \delta_L(z)$

- زمانی که

خطی: $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \delta_L = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^{2/3} = 0.341$ در حالی که

غیرخطی: $\theta = \pi/2 \rightarrow \delta = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2 - 1 = 0.466$

خطی: $\theta = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \delta_L = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{2/3} \simeq 0.568$ در حالی که

غیرخطی: $\theta = 2\pi/3 \rightarrow \delta = \frac{9}{2}\,\frac{(2\pi/3 - \sqrt{3}/2)^2}{(1-\frac{1}{2})^3} - 1 = 1.01 \simeq 1$

در صورتی که گذار از گستره خطی به غیرخطی را $\delta \simeq 1$ در نظر بگیریم. در این صورت $\theta = \frac{2\pi}{3}$ که معادل $(\delta_L \sim 0.57)$ است سیستم وارد گستره غیرخطی می‌شود. که تقریباً در انتقال به سرخ زیر روی می‌دهد

$$1 + z_{NL} = 1.06\,\delta_i(1+z_i) = \frac{\delta_0}{0.57}$$

در تحول ناحیه فراچگال اتفاق مهم در $\theta = \pi$ می‌افتد، که این ناحیه به بیشینه شعاع خود می‌رسد

با توجه به روابط مربوط به انتقال به سرخ، شعاع ناحیه، چگالی برای نقطه TURN AROUND خواهیم داشت

$$1+z = \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_i (1+z_i)}{(\theta - \sin\theta)^{2/3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\delta_0}{(\theta - \sin\theta)^{2/3}} \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{\theta=\pi} \quad 1+z_m = \frac{\delta_i (1+z_i)}{\pi^{2/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}} = 0.57 (1+z_i)\, \delta_i = \frac{5}{3} \frac{\delta_0}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}} \cong \frac{\delta_0}{1.062}$$

انتقال به سرخی که ناحیه فراچگال به بیشینه شعاع خود می‌رسد.

" THIS RELATION Give the redshift of TURN AROUND "

$$r(t) = \frac{3x}{10\delta_0}(1-\cos\theta) \qquad (۲)$$

" δ_0 is the hypothetical linear density contrast "

$$\xrightarrow{\theta=\pi} \quad r_m = \frac{3}{5}\frac{x}{\delta_0}$$

$$\bar{\rho}(t) = \rho_b(t) \frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{\theta=\pi} \quad \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_b}\right)_m = 1 + \bar{\delta}_m = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.6$$

حال با مشخص بودن انتقال به سرخ اولیه و تباین چگالی اولیه (z_i, δ_i) زمان turn around را می‌توان حساب کرد. به طور مثال برای ناحیه‌ای با $\delta_i \simeq 10^{-3}$ در $z_i \simeq 10^4$ خواهیم داشت $z_m \simeq 4.7$ با استفاده از رابطه (1)

رابطه (۲) شعاع بیشینه ناحیه فراچگال را به دست می دهد. رابطه (۳) نشان می دهد که ناحیه فراچگال، 5.6 مرتبه چگال تر از زمینه است، در نتیجه با تباین چگالی 4.6 در زمان TURN AROUND کاملاً در ناحیه غیرخطی هستیم.

تباین چگالی خطی

$$\delta_L = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\left(\pi - \sin\pi\right)^{2/3} \simeq 1.063$$

پس از TURN AROUND ناحیه فراچگال در یک نقطه خواهد رسید با توجه به رابطه

$$\frac{\bar{\rho}(t)}{\rho_b(t)} = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3}$$

البته قبل از آن که به این نقطه برسیم، به ترتیب عدم تقطع پوسته ها SHELL CROSSING و سرعت های خاصه کوچک، دیگر تابع اصل ها نسبیت و هولفد بدون برخوردی شاره (ماده تاریک) صدق نمی کند "VIOLENT RELAXATION" به حالت ویریالی می رسد.

□ ویریالی شدن: زمان سقوط آزاد، رمبش گرانشی (Dynamical time of G.C.) Gravitational Collapse (G.C.)

$$t_{dyn} \simeq (G\rho)^{-1/2}$$

از آن جایی که پتانسیل گرانشی با زمان تغییر می کند ذرات مدارهایی که انرژی سیستم را وابسته نه می دارند، حرکت دنبی کنند و به صورت کاملاً پیچیده ای دامنه انرژی های خود را افزایش می دهند.

تغییرات پتانسیل مکانیسمی را ایجاد می کند که در زمان t_{dyn} کوچک تر از t_{Relax} در جسم عمل کند.

این مکانیسم relaxation باعث می‌شود که مولفه‌های برخوردی شاره (ماده تاریک)
در شعاع r_{vir}، با سرعت پخشی v و چگالی ρ_{coll} به آرامش برسد!

پس از ویریالی شدن شرط $|U| = 2K$ برای پوسته‌ی بسته برقرار است به طوری که انرژی کل
آن برابر $\mathcal{E} = U + K = -K$ باشد.

در زمان TURN AROUND، تمام انرژی به صورت پتانسیل است. برای ناحیه فراچگال با تقارن کروی
$\mathcal{E} = -\dfrac{3GM^2}{5r_m}$ است. سرعت ویریال "v" و شعاع ویریال "r_{vir}" Virial Radius
به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{cases} K \equiv \dfrac{Mv^2}{2} = -\mathcal{E} = \dfrac{3GM^2}{5r_m} \\[2ex] |U| = \dfrac{3GM^2}{5r_{vir}} = 2K = Mv^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v = \left(\dfrac{6GM}{5r_m}\right)^{1/2} \\[2ex] r_{vir} = \dfrac{r_{max}}{2} \end{cases}$$

زمان مورد نیاز برای ناحیه فراچگال، برای این که سیستم به حالت ویریالی برسد برابر با زمان معادل برای
Collapse (ریزش) است.

$\theta = 2\pi$

$$(1+z_{coll}) = \frac{\delta_i (1+z_i)}{(2\pi)^{2/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}} = 0.36\, \delta_i (1+z_i)$$

$$= 0.63\, (1+z_m)$$

$$= \delta_0 / 1.686$$

حال می خواهیم چگالی ناحیه رمبیده را محاسبه کنیم.

$$r_{vir} = \frac{r_m}{2} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \rho_{coll} = 8\rho_m \quad + \quad \rho_m \cong 5.6\,\rho_b(t_m)$$

چگالی ناحیه فراچگال در زمان TURN AROUND — چگالی پس زمینه

از طرف دیگر

$$\rho_b(t_m) = (1+z_m)^3 (1+z_{coll})^{-3} \rho_b(t_{coll})$$

$$\begin{cases} \rho_{coll} \simeq 2^3 \rho_m \simeq 44.8\,\rho_b(t_m) \simeq \dfrac{1}{0.63^3}\, 44.8\,\rho_b(t_{coll}) \\[2ex] \dfrac{1+z_m}{1+z_{coll}} = \dfrac{1}{0.63} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} \rho_{coll} \simeq 178\,\rho_0 (1+z_{coll})^3 \simeq 178\,\rho_b(t_{coll})$$

"چگالی پس زمینه کیهان در زمان حال"

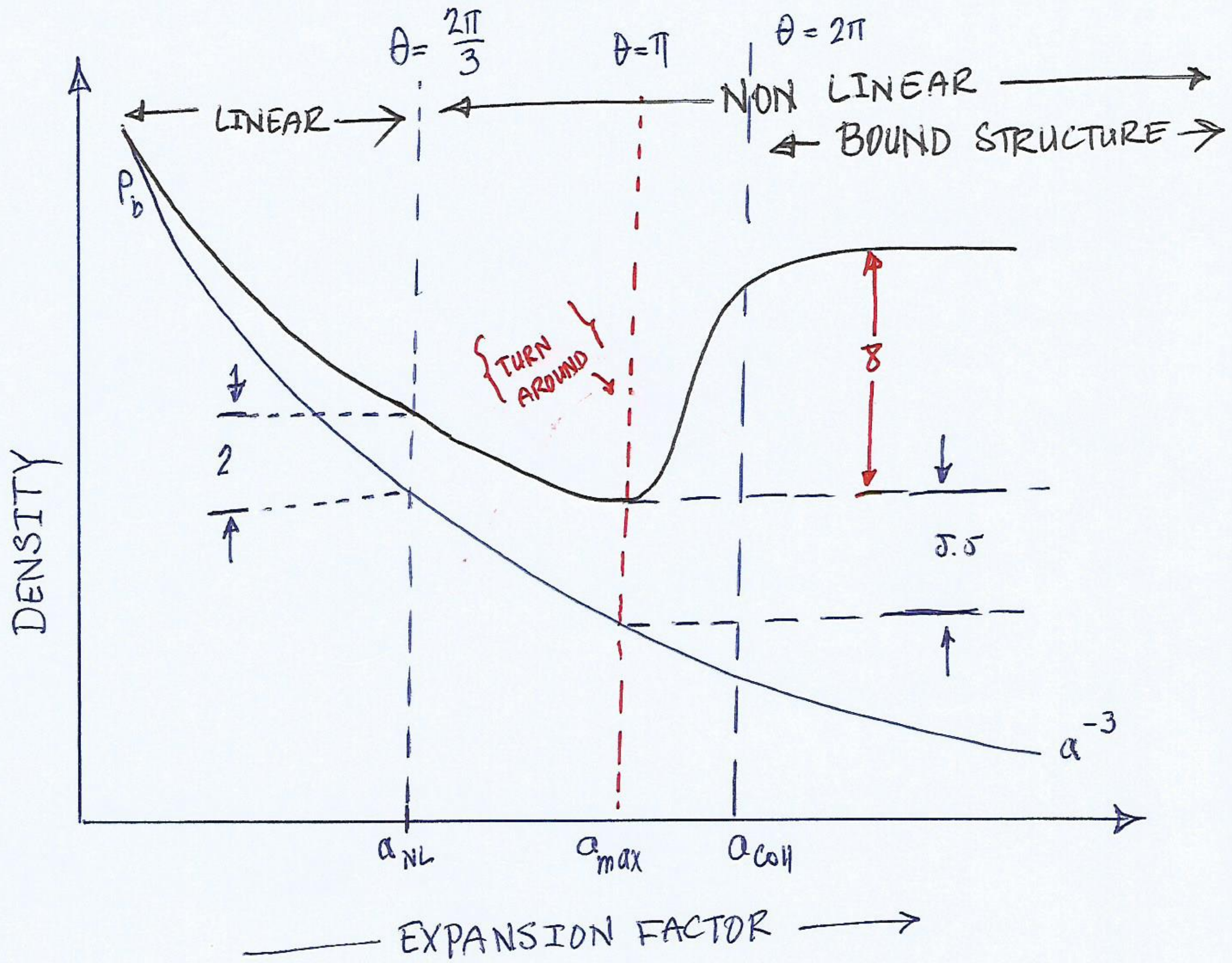
حال برای مقایسه، تباین چگالی در گستره خطی برابر است با

$$\delta_L = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} (\theta - \sin\theta)^{2/3} \simeq \boxed{1.686}$$

"گستره خطی" "$\theta = 2\pi$"

از زمانی که ساختار در پایان شود، چگالی ابعاد آن تغییر نمی کند. ولی از آن جایی که چگالی پس زمینه $\rho_b \propto a^{-3}$، تباین چگالی به صورت a^3 برای $t > t_{coll}$ رشد می کند.

تحول ساختار در گستره‌ی غیرخطی در رشد کره به صورت زیر است ؛



MAIN REF: - STRUCTURE FORMATION in THE UNIVERSE
T. Padmanabhan, Cambridge University Press 1993

- Cosmology and Astrophysics through problems
T. Padmanabhan, Cambridge University Press 1996

- Asantha Cooray & Ravi K. Sheth
Phys. Rept. 372 (2002) 1-129
astroph/0206508

" با همکاری آقای فرید حسینی "

SB
Physics Departement, SUT