نظریه اختلالات کیهانی (رهیافت نسبیتی) II

Cosmological Perturbation Theory II

در درسنامه قبل، به بررسی اختلالات تا مرتبه اول خطی در قسمت هندسی معادلات انیشتین پرداختیم.

در این قسمت به بررسی اختلالات در قسمت تانسور انرژی-تکانه می‌پردازیم و به تبع آن معادلات انیشتین را استخراج می‌کنیم.

ابتدا به بررسی شاره (سیال) تک مولفه‌ای می‌پردازیم.

general fluid - energy-momentum tensor:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + [q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}]$$

- ρ: energy density — چگالی انرژی
- u_μ: four-velocity vector — چاربردار سرعت
- P: Pressure — فشار
- q_μ: Heat Flux Vector — بردار شار گرمایی
- $\pi_{\mu\nu}$: Viscous shear Tensor. — تانسور وشکسانی برش

جملات داخل کروشه، برای سیال‌های مهم هستند که انرژی درونی آن‌ها سهم قابل توجه‌ای از انرژی کل را دارد

برای سیال ایده‌ال

$$\pi_{\mu\nu} = 0 \quad \& \quad q_\mu = 0 \quad \text{(perfect fluid)}$$

همچنین فرض خواهیم کرد که سیال مختل شده نیز، ایده‌ال باقی می‌ماند

$$\Sigma^i_j \equiv \delta T^i_j = 0 \quad (i \neq j)$$

برای کمیت‌های اختلالی تعریف می‌کنیم

تباین چگالی:

$$\delta \equiv \frac{\rho(x) - \bar\rho}{\bar\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho}$$

$\bar\rho$: چگالی میانگین

$\rho(x)$: میدان چگالی

$$\theta \equiv \nabla_i v^i \quad \left(v^i \equiv \frac{dx^i}{d\eta}\right)$$

θ: دیورژانس سرعت

در حالت کلی، برای هر مولفه نهایی یک زوج (δ_i , θ_i) وجود دارد و تمام کمیت‌های اختلالی تابعی از (t,x) هستند. نکته مهم در مورد کمیت‌های اختلالی مانند تابع چگالی، این است که این کمیت‌ها میدان‌های تصادفی (random fields) هستند که طبق تعریف دارای میانگین صفر هستند $\langle \delta \rangle = 0$

هدف ما از بررسی دینامیک تابع چگالی این است که $\delta(x)$ در هر نقطه از میدان با مختصه $\vec{X}$ به صورت $\delta(x,t) = D(t)\,\delta(x,0)$ افزایش یا کاهش می‌یابد.

در گستره خطی تحول زمانی را جدا کرده‌ایم ($D(t)$ تابع رشد است. "Growth Function")

و شرایط اولیه در هر نقطه $\delta(\vec{x},0)$ با یک توزیع آماری اولیه داده می‌شود که معمولاً طبق شرایط اولیه کیهانی (که مطابق با رصد تابش پس زمینه کیهانی است) گاوسی Gaussian در نظر گرفته می‌شود.

- با توجه به تعریف تانسور انرژی تکانه با معادله حالت $w = P/\rho$ برای سیال تک مولفه‌ای کامل "perfect Single fluid" به صورت زیر خواهد بود.

$$T^\mu_\nu = (\rho + P)\,u^\mu u_\nu + P\,\delta^\mu_\nu$$

$$\delta T^\mu_\nu = (\delta\rho + \delta P)\,u^\mu u_\nu + \rho(1+w)\left(u_\nu \delta u^\mu + u^\mu \delta u_\nu\right) + \delta P\,\delta^\mu_\nu$$

$$\delta T^\mu_\nu = \rho\left[\delta(1+c_s^2)\,u_\nu u^\mu + (1+w)\left(u_\nu \delta u^\mu + u^\mu \delta u_\nu\right) + c_s^2\,\delta\,\delta^\mu_\nu\right]$$

(تباین چگالی نیست) نکته مهم سرعت صوت شاره را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم.

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta P}{\delta\rho}$$

درصورتی که فشار، حتی در حالت اختلالی، فقط به چگالی بستگی داشته باشد که به آن
سیال باروتروپیک (Barotropic Fluid) می‌گویند. در این صورت سرعت سیال برابر خواهد بود با

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}$$

- c_s تا مرتبه صفرم محاسبه شده است، زیرا همواره به صورت ضریب یک کمیت اختلالی ظاهر می‌شود.

□ رابطه آخر فقط در متریک FRW برقرار است که در حد پس زمینه همه چیز فقط به زمان بستگی دارد.

□ از آن جایی که c_s در حالت باروتروپیک همانند w فقط به کمیت‌های پس زمینه ربط دارد، درجه آزادی جدیدی تولید نکرده است ولی در حالت کلی فشار می‌تواند به درجات آزادی درونی سیستم هم بستگی داشته باشد همانند انتروپی s، در این صورت

$$c_s^2 = \frac{\delta P(\rho, s)}{\delta \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \rho} = c_{s(a)}^2 + c_{s(na)}^2$$

- که سرعت صوت می‌دهد

$$c_{s(a)} \equiv \sqrt{\frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}} \quad \text{adiabatic sound speed}$$

$$c_{s(na)} \equiv \sqrt{\frac{\partial P}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial \rho}} \quad \text{non-adiabatic sound speed}$$

سرعت صوت غیر بی‌دررو به ترمودینامیک سیال بستگی دارد و در مرتبه خطی اختلال یک درجه آزادی جدید تولید می‌کند.

در نتیجه تا مرتبه اول اختلال ویژگی‌های سیال با معادله حالت $W = W(z)$ و سرعت صوت کلی $c_s = c_s(z)$ داده می‌شود و یا به بیان دیگر با مشخص بودن

$$P = P(\rho, s)$$

ترم های اختلالی تانسور انرژی تکانه به صورت زیر است :

$T_{\mu\nu}$

$$\delta T^0_{\ 0} = -\delta\rho \qquad \delta T^i_{\ j} = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

$$\delta T^0_{\ i} = -\delta T^i_{\ 0} = (1+w)\rho v^i$$

$$\delta T^1_{\ 1} = \delta T^2_{\ 2} = \delta T^3_{\ 3} = c_s^2\,\delta\rho$$

از درس نامه قبل ترم های مربوط به تانسور انیشتین

$G_{\mu\nu}$

$$\delta G^0_{\ 0} = 2a^{-2}\left[3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2\Phi\right]$$

$$\delta G^0_{\ i} = 2a^{-2}\left[\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right]_{|i}$$

$$\delta G^i_{\ j} = 2a^{-2}\left[(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi + \mathcal{H}\Psi' - \Phi'' - 2\mathcal{H}\Phi'\right]\delta^i_j + a^{-2}\left[\nabla^2(\Psi+\Phi)\,\delta^i_j - (\Psi+\Phi)^{|i}_{\ \ |j}\right]$$

نتیجه معادله انیشتین برابر خواهد بود با ($\delta G^\mu_{\ \nu} = 8\pi G\,\delta T^\mu_{\ \nu}$)

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2\Phi = -4\pi G a^2\,\delta\rho \qquad (0-0)$$

(0-i) یورانش

$$\nabla^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 (1+w)\rho\theta$$

(i-j) $i \neq j$

$$\Psi = -\Phi$$

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2\,\delta\rho$$

(i-i)

حال معادلات دیگری نیز از پیوستگی تانسور انرژی تکانه استخراج می‌کنیم

طبق تعریف مشتق هموردا تانسور T^{μ}_{ν} :

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = T^{\mu}_{\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} T^{\beta}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} T^{\beta}_{\nu}$$

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \Rightarrow \delta T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

برای $\nu = 0$

$$\Rightarrow 0 = \delta T^{\mu}_{0,\mu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{0\beta} T^{\beta}_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\,\delta T^{\beta}_{\alpha} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} T^{\beta}_{0} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\,\delta T^{\beta}_{\nu}$$

با توجه به نمادهای کریستوفل اختلالی

$$\begin{cases} \delta\Gamma^{0}_{ij} = \delta_{ij}\left[2\mathcal{H}(\Phi - \Psi) + \Phi'\right] \\ \delta\Gamma^{0}_{00} = \Psi' \\ \delta\Gamma^{0}_{0i} = \delta\Gamma^{i}_{00} = \Psi_{,i} \\ \delta\Gamma^{i}_{j0} = \delta^{i}_{j}\,\Phi' \end{cases}$$

$$\Gamma^{0}_{ij} = a^{2} H \gamma_{ij} \qquad \Gamma^{i}_{0j} = \Gamma^{i}_{j0} = H\delta^{i}_{j}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = 0\ ;\quad \Gamma^{1}_{22} = -r\ ;\quad \Gamma^{1}_{33} = -r\sin^{2}\theta$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \cot\theta$$

با جایگذاری Γ , $\delta\Gamma$

$$\longrightarrow \quad (\delta\rho)' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta P) = -(\rho + P)(\theta + 3\Phi')$$

خواهیم داشت

$$\rightarrow \quad \rho\delta' + \rho'\delta + 3\mathcal{H}\,\delta\rho\,(1 + c_s^{2}) = -\rho(1+w)(\theta + 3\Phi')$$

$$\rho\delta' + \delta\left[-3\mathcal{H}\rho(1+w)\right] + 3\mathcal{H}\,\delta\rho\,(1 + c_s^{2}) = -\rho(1+w)(\theta + 3\Phi')$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0$$

که در رابطه فوق از معادله پیوستگی پس زمینه استفاده کردیم. اگر عبارت فوق را بر چگالی ρ تقسیم کنیم:

ترم ۱ ترم ۱

$$\delta' + 3\mathcal{H}\cancel{\delta(1+c_s^2)} - 3\mathcal{H}\cancel{\delta(1+w)} = -(1+w)(\theta + 3\Phi')$$

در نتیجه $\rightarrow$

$$\boxed{\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta = -(1+w)(\theta + 3\Phi')}$$

Perturbed Continuity Equation

برای مولفه غیر نسبیتی (مانند ماده تاریک و باریونی) که $w = 0$ ، $c_s^2 = 0$ معادله بالا تبدیل می‌شود به

$$\delta' = -\theta - 3\Phi' \quad \text{for non-relativistic matter}$$

- رابطه بالا می‌گوید که تباین چگالی افزایش پیدا می‌کند، درصورتی که دیورژانس سرعت وجود داشته باشد و بدین معنی که ماده بیشتری وارد شود، بجای این که خارج شود.

ترم Φ' در رهیافت نیوتنی وجود ندارد، این ترم در مقیاس های کوچک یا میدان های گرانشی کند تغییر قابل صرف نظر است.

علاوه بر معادله پیوستگی، با بررسی $\delta T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ ، for $\nu = i$ می‌توان معادله اویلر Euler Equation را به دست آورد.

$$\delta T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0, \quad \nu = i \xrightarrow[\text{leads to}]{} {}^{*}\ \delta q' + 3\mathcal{H}\delta q = -a\delta P - (\rho + P)a\Psi$$

که $\delta q \equiv a(\rho + P)v$ ، v پتانسیل سرعت است!

v : پتانسیل سرعت $\qquad v^i = \nabla^i v$

حال رابطه فوق را برحسب ∇ نوشته و دیورژانس آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\delta q \equiv a(\rho + P)v \Rightarrow \delta q_{,i} = [a\rho(1+w)v]_{,i}$$

$$\delta q'_{,i} = (a\rho(1+w)v_{,i})' = aH\rho(1+w)v_{,i} + a\rho'(1+w)v_i + aH\rho w' v_i + aH\rho(1+w)v'_i$$

+ می‌دانیم $\qquad \rho' = -3H\rho(1+w)$

$\Rightarrow$ دیورژانس

$$\nabla \cdot (\delta q') = aH\rho(1+w)\theta + a(-3H\rho(1+w))\theta + aH\rho w'\theta + aH\rho(1+w)\theta'$$

ترم دوم درست

با جایگذاری در رابطه * و تقسیم رابطه بر $aH\rho(1+w)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\theta' + \left[H(1-3w) + \frac{w'}{1+w}\right]\theta = -\nabla^2\left(\frac{c_s^2}{1+w}\delta + \Psi\right)}$$

For non-relativistic matter, $w=0$, $c_s=0$

$$\theta' + H\theta = -\nabla^2\Psi - \nabla^2(c_s^2\delta)$$

رابطه اول نشان می‌دهد که شتاب مربوط به سرعت خاصه به گرادیان پتانسیل گرانشی و گرادیان فشار ربط دارد.

حال برای بررسی رشد اختلال‌ها به فضای فوریه می‌رویم که هر یک از مدها به صورت مجزا تحول می‌یابند.

(تا مرتبه ۱ معادلات اختلالی)

$$\Phi = \frac{V}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\Phi_k\, d^3k \quad ; \quad \Psi = \frac{V}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\Psi_k\, d^3k$$

$$\delta = \frac{V}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\delta_k\, d^3k \quad ; \quad \theta = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\theta_k\, d^3k$$

اندیس k مربوط به هر مد فوریه است. k عدد موج wavenumber همراه است. که هر میدان اختلالی برحسب طول موج تحت $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ بسط داده‌ایم و هر مولفه به طور جداگانه تحول می‌شود و هر مولفه در معادله تحولی میدان (اختلال با k متفاوت) صدق می‌کند.

مقیاس فیزیکی هر مد با انبساط جهان به صورت زیر رشد می‌کند

$$\lambda_p = \left(\frac{2\pi}{k}\right) a$$

واضح است که اگر وارد گستره غیرخطی شویم جداسازی معادلات تحول برحسب مدهای فوریه امکان‌پذیر نخواهد بود. اختلالات از انبساط جهانی جدا شده و رشد می‌کنند.

اگر کلاً مقصد به بسته‌های متوسط‌گیری شده در جهت هستند.

$$\delta(x,y,z,t) = \delta_k(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\sim} \vec{k}\cdot\vec{r} = k(x+y+z)/\sqrt{3}$$

در حالت کلی برای هر کمیت فیزیکی A، مشتقات اول و دوم آن در فضای فوریه خواهیم داشت:

$$\phi(x,\eta) \rightarrow e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\phi(\eta)$$

$$\vec{\nabla}\phi(x,\eta) \rightarrow i\,e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\vec{k}\,\phi(\eta)$$

$$\nabla^2\phi(x,\eta) \equiv \nabla_i\nabla^i\phi(x,\eta) \rightarrow -e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,k^2\phi(\eta)$$

حامل $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ را می‌توان از معادلات ساده کرد، از آن جائی که مُدهای فوریه در گستره خطی قابل جداسازی هستند.

حال معادلات اینشتین و پیوستگی - اویلر را می‌توان در فضای فوریه به شکل زیر نوشت:

$$(0-0) \qquad k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \rho\delta$$

$$(0-i) \qquad k^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi G a^2 (1+w)\rho\theta$$

$$(i-j)\ \ i\neq j \qquad \Psi = -\Phi$$

$$(i-i) \qquad \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2 \rho\delta$$

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta = -(1+w)(\theta + 3\Phi')$$

$$\theta' + \left[\mathcal{H}(1-3w) + \frac{w'}{1+w}\right]\theta = k^2\left(\frac{c_s^2}{1+w}\delta + \Psi\right)$$

۲ معادله جفت شده بالا دینامیک یک تک سیال تنهایی Single fluid را بررسی می‌کند.

که $\Theta = i\vec{K}\cdot\vec{V}$

معادله فوق را می‌توان در دو گستره مقیاس بزرگ و کوچک، و در دو دوره تابش و ماده غالب بررسی کرد.

حال می‌توان معادله اینشتین ترم (0-0) و (0-i) را با هم ترکیب کرد و شکل نسبیتی معادله پواسون را بدست آورد:

$$K^2\Phi = 4\pi G a^2\rho\left[\delta + 3\mathcal{H}(1+w)\theta/k^2\right] = 4\pi G a^2\rho\,\Delta_m$$

که $\quad \Delta_m \equiv \delta + 3\mathcal{H}(1+w)\theta/K^2$

total-matter variable

از آنجا که Φ در پیمانه نیوتنی برابر کمیت پیمانه ناوردا Bardeen است (در ادامه ثابت خواهیم کرد)

Δ_m نیز کمیتی پیمانه ناوردا است. در گستره زیر افق $\mathcal{H}/K \ll 1$ می‌توان از ترم سرعت خاصه صرف نظر کرد

و معادله پواسون معمول را استخراج کرد.

توجه داشته باشید که برای $\delta>0$ ، $\Phi<0$ و $\Psi>0$ خواهد بود.

از طرف دیگر با ترکیب معادله پواسون و شرط $\Psi=-\Phi$ از معادله اینشتین می‌توان معادله تحول Φ را

فقط برحسب مشتقات آن و پارامتر هابل نوشت:

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\underbrace{\Psi'}_{-\Phi'} - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\underbrace{\Psi}_{-\Phi} = \underbrace{-4\pi G a^2 c_s^2\rho\delta}_{-c_s^2K^2\Phi - c_s^2 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi)}$$

$$\Rightarrow \Phi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Phi' + \left(c_s^2K^2 + 3\mathcal{H}^2c_s^2 + 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Phi = 0$$

حل معادله فوق پتانسیل گرانشی را در هر انتقال به سرخ دلخواه خواهد داد.

C_s ، w تابع دلخواه زمان هستند و ویژگی سیال را مشخص می کنند

حال با استفاده از معادله پواسون نسبیتی می توانیم معادله تحول تباین چگالی را به دست آوریم.

پیش از رابطه ای بین مشتق پارامتر هابل همراه و معادله حالت به دست می آوریم.

معادله فریدمن که مولفه ۰۰ی

معادله I $\quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$

معادله II $\quad \frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w)$ از آنجایی که $\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{\cdot} = \frac{\ddot a a - \dot a^2}{a^2} = \frac{\ddot a}{a} - H^2$ خواهیم داشت

معادله II $\quad \dot H + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w) \xrightarrow[\text{از رابطه I}]{} -\frac{1}{2}H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho$

$$\boxed{\dot H + H^2 = -\frac{1}{2}H^2(1+3w)} \quad (1)$$

حال سمت راست معادله فوق را برحسب $\frac{da/d\eta}{a} = \mathcal{H}$ که $dt = a\,d\eta$ می نویسیم

$$\dot H + H^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{da/dt}{a}\right) + \left(\frac{da/dt}{a}\right)^2 = \frac{d\eta}{dt}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}}{a}\right) + \left(\frac{\frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}}{a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\left(\mathcal{H}\frac{1}{a}\right) + \mathcal{H}^2\frac{1}{a^2}$$

مشتق نسبت به زمان همراه $'$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{\mathcal{H}'a - \frac{da}{d\eta}\mathcal{H}}{a^2}\right] + \mathcal{H}^2\frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\mathcal{H}' - \frac{1}{a^2}\mathcal{H}^2 + \frac{1}{a^2}\mathcal{H}^2 \equiv \frac{1}{a^2}\mathcal{H}' \quad (2)$$

حال با استفاده از رابطه (۱) ، (۲۶) خواهیم داشت :

$$\boxed{\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}(1+3w)\mathcal{H}^2}$$

اکنون با استفاده از معادله پواسون نسبیتی و مشتقات آن معادله تحول تباین چگالی را به دست می آوریم.

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \Delta_m$$

با استفاده از معادله فریدمن

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \rightarrow \frac{3}{2}a^2H^2 = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 = 4\pi G \rho a^2$$

در نتیجه معادله پواسون برای $K = 1$ (در تمام ترم های ϕ, ϕ', ϕ'' ، عدد موج بین ثابت است)

$$\boxed{\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Delta_m}$$

$$\Phi' = \frac{3}{2}2\mathcal{H}'\mathcal{H}\Delta_m + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Delta_m' = 3\left(-\frac{1}{2}(1+3w)\mathcal{H}^2\right)\mathcal{H}\Delta_m + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Delta_m'$$

$$\rightarrow \Phi' = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^3(1+3w)\Delta_m + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Delta_m'$$

در نتیجه

$$\rightarrow \boxed{\Phi' = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\left[\Delta_m' - \mathcal{H}(1+3w)\Delta_m\right]}$$

از این مشتق دوم

$$\Phi'' = \frac{3}{2}2\overset{-\frac{1}{2}(1+3w)\mathcal{H}^2}{\mathcal{H}'}\mathcal{H}\left[\Delta_m' - \mathcal{H}(1+3w)\Delta_m\right] + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Big[\Delta_m'' - \mathcal{H}'(1+3w)\Delta_m$$

$$- \mathcal{H}(1+3w)\Delta_m' - 3\mathcal{H}w'\Delta_m\Big]$$

با جایگذاری $\mathcal{H}'$ از رابطه 1 * } در صفحه بعد خواهیم داشت :

$$\Phi'' = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Big[-(1+3w)\mathcal{H}\big(\Delta_m' - \mathcal{H}(1+3w)\Delta_m\big) + \Delta_m'' + \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(1+3w)^2\Delta_m - \mathcal{H}(1+3w)\Delta_m' - 3\mathcal{H}w'\Delta_m\Big]$$

اکنون با ترکیب روابط بدست آمده برای Φ , Φ' , Φ'' و ساده کردن ترم $\frac{3}{2}\mathcal{H}^2$ خواهیم داشت:

$$0 = \Delta_m'' + \Delta_m'\Big[\underbrace{-(1+3w)\mathcal{H}}_{\text{ترم از } \Phi''} \underbrace{-(1+3w)\mathcal{H}}_{\text{ترم از } \Phi''} + \underbrace{3\mathcal{H}(1+c_s^2)}_{\text{ترم از } \Phi'}\Big]$$

$$+ \overbrace{\Delta_m}^{\text{ضریب } \Delta_m}\Big[\underbrace{(1+3w)^2\mathcal{H}^2}_{\text{ترم از } \Phi''} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{H}^2(1+3w)^2}_{\text{ترم از } \Phi''} - \underbrace{3\mathcal{H}w'_{*}}_{\text{ترم از } \Phi''}$$

$$+ \underbrace{3\mathcal{H}(1+c_s^2)\big(-\mathcal{H}(1+3w)\big)}_{\text{ترم از } \Phi'} + \underbrace{\big(c_s^2k^2 + 3\mathcal{H}^2c_s^2 + 2\mathcal{H}'_{**} + \mathcal{H}^2\big)}_{\text{ترم از } \Phi}\Big]$$

قبل از ساده کردن نهایی ترم * باید برحسب w , c_s^2 نوشته شود.

$$w' = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{p'\rho - \rho'p}{\rho^2} = \frac{p'}{\rho} - \frac{\rho' w}{\rho} \quad (1)$$

پیوستگی $\quad \rho' = -3\mathcal{H}\rho(1+w) \quad$ (۲)

طبق تعریف $\quad p' = c_s^2\rho' = -3\mathcal{H}\rho(1+w)c_s^2 \quad$ (۳)

از روابط (۱)، (۲)، (۳)

$$w' = \frac{-3\mathcal{H}p(1+w)c_s^2}{\rho} + \frac{3\mathcal{H}p(1+w)w}{\rho}$$

با در نظر فرض $p = p(\rho)$

$$\boxed{w' = -3\mathcal{H}(1+w)c_s^2 + 3\mathcal{H}(1+w)w}$$

$$w' = +3\mathcal{H}(1+w)[w - c_s^2]$$

همچنین در نظر $**$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}(1+3w)\mathcal{H}^2$$

در نتیجه معادله تحولی Δ_m به صورت زیر خواهد بود:

$$0 = \Delta_m'' + \Delta_m'\left[\mathcal{H}(1+3c_s^2-6w)\right] + \Delta_m\left[c_s^2k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1-6c_s^2-3w^2+8w)\right]$$

"محاسبه شده از روشه Δ_m " "محاسبه شده"

برای ماده تاریک با معادله حالت و سرعت صفر $(w = c_s = 0)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{0 = \Delta_m'' + \mathcal{H}\Delta_m' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Delta_m}$$

معادله تحولی فوق را در ادامه درسنامه به سمت تحول در زمان کیهانی، انتقال به سرخ بازنویسی خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که در مقیاس زیر افق، معادله نیوتنی ماده تاریک به دست می آید.

حال به بررسی تحول پتانسیل گرانشی و تباین چگالی در مقیاس های متفاوت می پردازیم.

☐ مقیاس های بزرگتر از افق

large scale limit: $k \ll \mathcal{H} = aH$

این بدان معنی است که طول فیزیکی $\lambda_p = \frac{2\pi}{k} a$ بزرگتر از شعاع هابل H^{-1} در مقیاس خاص است

Super-horizon Scale "مقیاس فرا افق"

است توجه داشته باشید که H^{-1} تقریبا برابر افق است.

درصورتی که معادله حالت فقط فشار را تابعی از چگالی بداند $p = p(\rho)$ در این صورت با شرط اضافه ثابت بودن معادله حالت $w = cte$ از رابطه

$$w' = 0 = 3\mathcal{H}(1+w)\left[w - c_s^2\right] \to \boxed{w = c_s^2}$$

که شرط فوق برای ماده و تابش به صورت مجزا صحیح است. حال رابطه تحول پتانسیل به صورت زیر می باشد

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Phi' + (\underbrace{c_s^2 k^2 + 3\mathcal{H}^2 c_s^2 + 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}_{A})\Phi = 0$$

↓ قابل صرف نظر در مقیاس فرا افق ($c_s^2 k^2$)

$$A \simeq 3\mathcal{H}^2 c_s^2 + 2\left(-\tfrac{1}{2}(1+3c_s^2)\mathcal{H}^2\right) + \mathcal{H}^2$$

↓ برابری w و c_s^2

$$\simeq 3\mathcal{H}^2 c_s^2 - \mathcal{H}^2 - 3\mathcal{H}^2 c_s^2 + \mathcal{H}^2 \simeq 0$$

در نتیجه

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Phi' = 0 \xrightarrow{\text{که}} \Phi' = 0$$ جواب است

پتانسیل گرانشی در فرا افق ثابت است.

حال با شرط $k \ll \mathcal{H}$ و جواب $\Phi' = 0$ معادله پواسون تبدیل خواهد شد به

$$\underbrace{k^2\Phi}_{\text{قابل صرف نظر}} + 3\mathcal{H}(\underbrace{\Phi'}_{=0} - \mathcal{H}\underbrace{\Psi}_{=-\Phi}) = 4\pi G a^2 \rho \delta$$

در نتیجه $\longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta \\ \text{با استفاده از معادله فریدمن} \quad 3\mathcal{H}^2 = 8\pi G \rho a^2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\delta = 2\Phi}$$

در مقیاس های بزرگ چون $\Phi = cte \longleftarrow \delta = cte$

از آن جایی که معادله حاکم بر Φ، درجه ۲ است، دو جواب خواهیم داشت که $\Phi = cte$ جواب غالب می باشد. این بدان معناست که برای سیالی که $c_s^2 = w$ در گستره فراافق، پتانسیل گرانشی ثابت است. (این شرط برای سیالی که $c_s^2 > -1$ باشد، صادق است)

در دوره گذار تاریخ کیهانی از تابش غالب به ماده غالب شرط فوق نقض می شود و به تبع آن پتانسیل گرانشی ثابت نیست.

در بحث اختلالات اولیه کیهانی در بحث تورم نیز کمیتی به نام خمش ناوردا، در فراافق ثابت می ماند

بحث انتقال اختلالات خمش Curvature Perturbation به اختلالات پتانسیل گرانشی موضوع بحث هیجان انگیز و مجزایی است.

□ مقیاس های کوچکتر از افق :

حال به بررسی مقیاس های کوچکتر از افق می پردازیم که $k \gg \mathcal{H}$

Sub-Horizon Scale
Deep inside Horizon,

اختلالات مربوط به سیال بدون فشار همواره رشد خواهد کرد چون هیچ مانعی برای توقف رشد اختلالات وجود ندارد.
این بدین معنا است که برای سیالی با فشار غیر صفر، عامل گرانش و فشار در تقابل هم هستند.

برای سیال با $c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} \ll 1 \; , \; w = 0$

با استفاده از معادله (0-i) انشتین

$$k^2 (\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -\underbrace{4\pi G a^2}_{-\frac{3}{2}\mathcal{H}^2} (1 + \underbrace{w}_{0}) \rho \theta$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{\mathcal{H}^2} \gg 1 \longrightarrow$$ در نتیجه $$\Phi' - \mathcal{H}\Phi \simeq 0$$

در نتیجه تبدیل فوریه معادله پواسون (0-0 انشتین) در این حد برابر خواهد بود با

$$k^2 \Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \delta$$

که این رابطه دقیقا در حد نیوتنی صحیح است.

حال به بازنویسی معادله پیوستگی و اویلر در این حد می پردازیم

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta = -(1+w)(\theta + 3\Phi')$$

$$\Rightarrow c_s \ll 1 ; w = 0 \quad : \quad \boxed{\delta' = -\theta - 3\Phi'}$$

$$\theta' + \left[\mathcal{H}(1-3w) + \frac{w'}{1+w}\right]\theta = k^2 \left(\frac{c_s^2}{1+w}\delta + \Psi\right)$$

$$\Rightarrow c_s \ll 1 ; w = 0 , \; \Phi = -\Psi \quad : \quad \boxed{\theta' = -\mathcal{H}\theta + c_s^2 k^2 \delta - k^2 \Phi}$$

چند نکته مهم: ترم $c_s^2 k^2$ را صرف نظر کرده ایم چون در مقیاس های کوچک $k \gg \mathcal{H}$ را اشتباه را بررسی کرده ایم. نکته بعدی این که ترم Φ' را می توان صرف نظر کرد (در معادله پیوستگی)

$$\begin{cases} \delta' = -\theta - 3\Phi' \\ k^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta \xrightarrow[\text{معادله پواسون}]{} k^2\Phi' = 3\mathcal{H}'\mathcal{H}\delta + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta' \end{cases}$$

$$\longrightarrow -3\Phi' = -\frac{9}{2}\frac{\mathcal{H}^2}{k^2}\delta\left(\frac{\delta'}{\delta} + 2\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}\right)$$

در نتیجه معادله پیوستگی:

$$\delta' = -\theta - \underbrace{\frac{9}{2}\frac{\mathcal{H}^2}{k^2}\delta\left(\frac{\delta'}{\delta} + 2\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}\right)}_{\text{قابل صرف نظر در مقیاس درون افق}}$$

$$\begin{cases} \delta' = -\theta & \text{پیوستگی} \\ \theta' = -\mathcal{H}\theta + c_s^2 k^2\delta - k^2\Phi & \text{اویلر} \\ k^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta & \text{پواسون} \end{cases}$$

از معادله پیوستگی مشتق می گیریم با جایگذاری معادله اویلر، پواسون خواهیم داشت:

$$\boxed{\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(c_s^2k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\right)\delta = 0}$$

معادله فوق، معادله تحول دینامیکی تباین چگالی سیال با $w=0$ در مقیاس زیر افق است.

در حد مینکوفسکی $\mathcal{H} \to 0$، معادله موج کلاسیک $\delta'' + c_s^2k^2\delta = 0$ بدست می آید

که c_s سرعت صوت است.

با توجه به معادله تحول δ :
$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(c_s^2 K^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\right)\delta = 0$$

در صورتی که $c_s^2 K^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 > 0$ اختلالات رشد نخواهد کرد. این رابطه همان طول جینز "Jeans length" معروف است.

$$\boxed{\lambda_{jeans} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}}$$

بدین ترتیب که اگر طول فیزیکی $\lambda_p = \frac{2\pi}{K} a$ کوچکتر از طول جینز باشد، اختلالات رشد نمی کنند. در مقیاس های کوچکتر از λ_J، اختلالات نوسان را انجام می دهد.

* برای ماده تاریک سرد، سرعت خاصه در گستره، خط تابل صرف نظر است، در نتیجه در هر مقیاس (خطی) ماده تاریک می تواند ساختار تشکیل دهد.

* در حالی که برای فوتون ها $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ در نتیجه $\lambda_{jeans}^{photon} \approx H^{-1}$

این بدین معنا است که فوتون در داخل شعاع هابل ساختار تشکیل نمی دهد.

* برای باریون ها قبل از زمان واجفتیدگی، باریون ها با فوتون ها جفت شده اند، در مقیاس های کوچک تشکیل ساختار نمی دهند baryon perturbation damped out

البته پس از واجفتیدگی باریون ها، ماده تاریک را دنبال می کنند.

در گستره $c_s K \ll \mathcal{H}$ اختلالات به صورت آزاد رشد می کنند، که این همان گستره ناپایداری گرانشی است "Gravitational Instability"

 The sub-horizon single pressureless fluid

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0$$

معادله تحول را کاملی برحسب e-folding می‌توان نوشت.

$N = \ln a$

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{d}{dN}\cdot\frac{dN}{d\eta} = \frac{d}{dN}\frac{a'}{a} = \mathcal{H}\frac{d}{dN}$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\mathcal{H}\frac{d}{dN}\right) = \frac{d}{dN}\left(\mathcal{H}\frac{d}{dN}\right)\frac{dN}{d\eta} = \frac{d\mathcal{H}}{dN}\mathcal{H}\frac{d}{dN} + \mathcal{H}^2\frac{d^2}{dN^2}$$

جایگذاری

$$\mathcal{H}^2\frac{d^2\delta}{dN^2} + \mathcal{H}\frac{d\mathcal{H}}{dN}\frac{d\delta}{dN} + \mathcal{H}^2\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0$$

درنتیجه $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{\mathcal{H}}\frac{d\mathcal{H}}{dN} + 1\right)\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0}$$

حال ارتباط بین $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}$, w را برحسب e-folding بازنویسی می‌کنیم.

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}(1+3w)\mathcal{H}^2$$

$$\mathcal{H}\frac{d\mathcal{H}}{dN}\Big/\mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}w \xrightarrow{\text{درنتیجه}} \frac{1}{\mathcal{H}}\frac{d\mathcal{H}}{dN} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}w$$

برای سیال بدون فشار داریم

$$\frac{1}{\mathcal{H}}\frac{d\mathcal{H}}{dN} = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه برای سیال بدون فشار $w=0$ معادله تحول تباین چگالی برابر است با

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0$$

با Ansatz ، $\delta = Ae^{\alpha N}$ ، α برابر خواهد بود با

در نتیجه تباین چگالی دو مد رشد کننده "+" Growing و کند شونده "−" decaying $\left(\alpha = 1, -\frac{3}{2}\right)$ دارد.

$$\underbrace{\delta_+ = Aa}_{\text{رشد تباین چگالی}} \quad ; \quad \delta_- = Ba^{-3/2}$$

برحسب زمان کیهانی t برابر

$$\delta_+ \propto t^{2/3}$$

این همان نتیجه ای است که در رهیافت کروی به دست آورده بودیم.

حد بازداری : $\delta = \dfrac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \dfrac{\cancel{H_b^2} + \frac{K}{a^2} - \cancel{H_b^2}}{H_b^2} = \dfrac{K}{a^2 H_b^2} = \dfrac{K}{\dot{a}^2}$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

دوره ماده غالب : $a \sim t^{2/3} \rightarrow \dot{a} \sim \frac{2}{3}t^{-1/3}$

ناحیه فرا چگال $K>0$ $\quad \dot{a}^{-2} \sim t^{2/3} \sim a$

در نتیجه $\boxed{\delta \sim a}$

ضریب A با استفاده از شرایط اولیه تعیین می شود که موضوع بحث بعدی خواهد بود.

مد میرا خیلی زود اهمیت خود را از دست می دهد و صرف نظر می شود.

نکته بسیار جالب این است که اگر جواب رشد کننده تباین چگالی را در معادله پواسون در دوران ماده تاریک غالب قرار دهیم خواهیم داشت :

$$K^2 \Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta$$

$$\Phi \propto a^2 \underbrace{a^{-3}}_{\text{چگالی ماده تاریک}} \underbrace{a}_{\text{مد رشد کننده}} \propto cte$$

در نتیجه تابع پتانسیل گرانشی در این دوره ثابت است.

این نکته جالبی است که زیرا در دوره انرژی تاریک غالب تابع پتانسیل گرانشی دیگر ثابت نیست.

تاکنون معادله تحول تباین چگالی را برحسب زمان همراه η و e-folding نوشتیم، اکنون معادله را برحسب زمان کیهانی می نویسیم ...

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0 \quad ; \quad N = \ln a$$

$$\frac{d}{dN} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{1}{dN/dt}\right) = \frac{1}{H}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dN^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{1}{dN/dt}\right) = \frac{1}{H}\left(-\frac{\dot H}{H^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{H}\frac{d^2}{dt^2}\right)$$

با جاگذاری

$$\frac{1}{H^2}\frac{d^2}{dt^2}\delta - \frac{\dot H}{H^3}\frac{d}{dt}\delta + \frac{1}{2}\frac{1}{H}\frac{d\delta}{dt} - \frac{3}{2}\delta = 0$$

$$\to \ddot\delta + H^2\left(\frac{1}{2}H^{-1} - \frac{\dot H}{H^3}\right)\dot\delta - \frac{3}{2}H^2\delta = 0$$

" ° " مشتق نسبت به زمان کیهانی

جمله داخل پرانتز

$$\frac{H^2}{H}\left(\frac{1}{2} - \frac{\dot H}{H^2}\right) = 2H$$

با توجه

$$\dot H + H^2 = -\frac{1}{2}H^2(1+3w) \to \dot H + \frac{3}{2}H^2 = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2\delta = 0} & (1) \\ k^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho\delta \; + \; H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0}$$

در نهایت می‌توان تحول تباین چگالی را برحسب انتقال به سرخ بیان کرد.

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{da}{dt}\right) = \left(-\frac{1}{a^2}\right)\dot{a}\frac{d}{dz} \qquad 1+z = \frac{1}{a} \rightarrow dz = -\frac{da}{a^2}$$

$$= -(1+z)H\frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dz}\left[-(1+z)H\frac{d}{dz}\right]\left[-(1+z)H\right] = (1+z)H^2\frac{d}{dz} + (1+z)^2\frac{dH}{dz}H\frac{d}{dz}$$

$$+ (1+z)^2H^2\frac{d^2}{dz^2}$$

جاگذاری

$$\longrightarrow (1+z)^2H^2\frac{d^2}{dz^2}\delta + (1+z)^2\,{}^{dH}/_{dz}\,H\frac{d\delta}{dz} + (1+z)H^2\frac{d\delta}{dz}$$

$$+ 2H\left[-(1+z)H\frac{d}{dz}\delta\right] - 4\pi G\rho\delta = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d^2\delta}{dz^2} + \frac{d\delta}{dz}\left[\frac{{}^{dH}/_{dz}}{H} - \frac{1}{1+z}\right] - 4\pi G\rho\delta = 0}$$

در درسنامه بعد به بررسی رشد اختلالات خطی کیهانی برای چند مولفه از کیهان ادامه خواهیم داد.