نظریه اختلالات کیهانی (رهیافت نسبیتی)

Cosmological Perturbation Theory

- برای توصیف کیهان در مقیاس های بزرگ، با استفاده از اصل کیهان شناختی (همگنی، همسانگردی کیهان) مشاهده کردیم که پارامتر هابل، پارامتر کندشوندگی از مهم ترین کمیت ها هستند و اندازه گیری دینامیک کیهان منبط می شوند هدف کیهان شناسی پس زمینه Background Cosmology است.

البته کیهان و مشاهدات ما از آن نشان می دهد که کیهان همگن، همسانگرد نیست، مملو از ساختارهای متعدد گرانشی، مانند کهکشان ها، گروه های کهکشانی، خوشه ها می باشد همچنین نواحی فرو چگالی به نام تهی جا (Void) نیز وجود دارد که در شبکه کیهانی Cosmic Web ساختارها را در بر گرفته است.

علاوه بر مشاهدات ما در طول موج اپتیکی که باعث آشکارسازی ساختارهای فوق شده است.

در طول موج رادیویی نیز، کیهان را رصد کرده ایم، فوتون های حاصل از آخرین سطح پراکندگی را دریافت کرده ایم. این تابش پس زمینه کیهانی نیز نشان می دهد که افتخال های دمایی (اگرچه ناچیز در حد $\frac{1}{10^5}$) نیز بر روی تابش پس زمینه کیهانی Cosmic Microwave Background (CMB) وجود دارد.

برای بررسی CMB و ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی Large Scale Structure (LSS) نیاز به مطالعه کیهان در گستره ای هستیم که از حالت همگن و همسانگردی دور است.

برای شروع باید به بررسی اختلالات خطی (Linear Perturbation) بپردازیم که توصیف کننده تابش پس زمینه کیهان خواهد بود و همچنین طیف توان ساده را در گستره خطی خواهد داد.

از این رو برای تشکیل ساختار (Structure Formation) در کیهان را در قدم اول می‌توان به دو گستره خطی و غیرخطی تقسیم کرد.

$$\delta_R(x) = \frac{\rho_R(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$$

$\downarrow$

تباین چگالی

Structure Formation

- linear regime (گستره خطی)
  $\delta(x) \lesssim 1$
- Non linear Regime (گستره غیرخطی)
  $\delta(x) > 1$

از طرف دیگر تشکیل ساختار را می‌توان در دو گستره نیوتنی (Newtonian Perturbation) یا گستره نسبیتی (General Relativistic PT) بررسی کرد.

Non-Relativistic Cosmic fluid

در مقیاس های کوچکتر از افق و در حالتی که شاره کیهانی (غیرنسبیتی) است می‌توان از هیأت نیوتنی (که موضوع بحث جداگانه ای است) استفاده کرد.

درصورتی که شاره کیهانی نسبیتی باشد (مانند فوتون ها، نوترینوها) و یا تلاش در بررسی تشکیل ساختار در مقیاس های نزدیک به افق باشیم باید از هیأت نسبیتی استفاده کرد.

Structure Formation

- Newtonian Regime (گستره نیوتنی)
  - مقیاس زیر افق
  - شاره غیر نسبیتی
- General Relativistic گستره نسبیتی
  - مقیاس های نزدیک به افق
  - شاره نسبیتی

در این درسنامه به بررسی تشکیل ساختار در گستره نسبیتی و نظریه اختلال نسبیتی کیهانی می‌پردازیم.

Perturbation Theory (PT)

برای توصیف کیهان همگن و همسانگرد از متریک FRW استفاده کردیم. حال برای بررسی کیهان دارای اختلال می‌توان از متریک پیچیده‌تری استفاده کرد که از جمع متریک FRW بعلاوه متریک اختلالی Perturbed Metric، ساخته شد. فیزیک با تقریب خوبی با بسط تغییر حول جواب زمینه کار می‌کند و کیهان‌شناسی نیز از آن مستثنی نیست.

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

که تمام موجوداتی که در نسبیت اختلالی متریک $\delta g_{\mu\nu}$ تعریف می‌شوند باید از مرتبه - صفر، کوچک باشند.

می‌توان متریک و اختلالات را برحسب زمان همدیس Conformal time نوشت

زمان فیزیکی

$$\eta = \int \frac{dt}{a} \qquad (dt = a\,d\eta)$$

عامل مقیاس

زمان همدیس

اختلالات را حول زمینه FRW درنظر می‌گیریم

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = a^2 \left(-d\eta^2 + \delta_{ij}\, dx^i dx^j\right)$$

"$i,j = 1,2,3$ اندیس های مختصات فضایی"

همچنین پارامتر هابل همدیس "Conformal Hubble param"

$$\boxed{\mathcal{H} \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta} = Ha}$$

Caliographic $\mathcal{H}$ stands for Conformal H

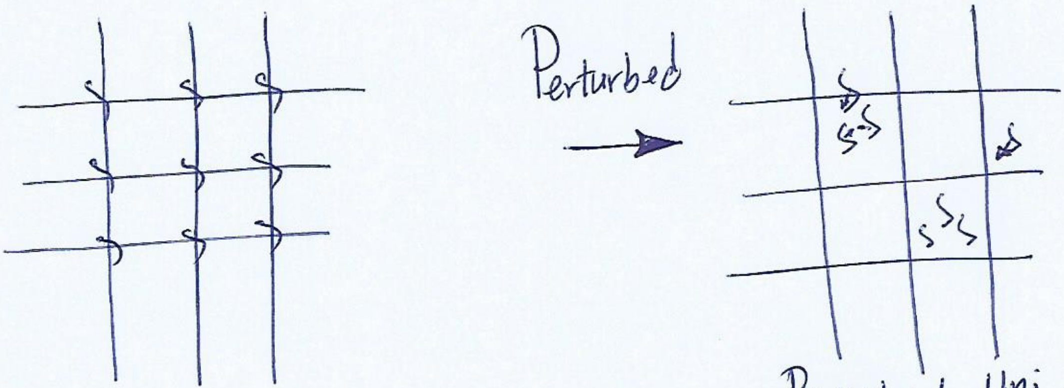
نکته مهم:

معادلات میدان در نسبیت عام تحت تبدیلات عام مختصات general coordinate change ناوردا invariant است. این بدین معنی است که صفحه بندی و جداسازی متریک به پس زمینه و اختلالی یکتا نیست.

در نظریه اختلال کیهانی، در حالت غالب، منظور این است که در تغییرات دستگاه مختصات، پس زمینه همواره ترکیب FRW باشد. در نتیجه همواره تغییرات بسیار کوچک infinitesimal transformation انتخاب می‌کنیم که $g^{(0)}_{\mu\nu}$ را ناوردا می‌گذارد و تمام تغییرات در $\delta g_{\mu\nu}$ است.

THIS CLASS OF TRANSFORMATIONS IS CALLED GAUGE TRANSFORMATION.
تبدیلات پیمانه‌ای

□ در کیهان همگن همسانگرد پیمانه (مختصه) همراه Comoving Coordinate را تعریف کردیم. بدین صورت که ذرات ماده که در کیهان منبسط‌شونده قرار دارند فاصله ثابت Comoving Distance خود را حفظ می‌کنند. در کیهان اختلالی نیز می‌توان این مختصه را حفظ کرد.



Comoving Coordinate

Hom. & Iso. Uni.

Perturbed Uni.

□ در این مختصه که به آن پیمانه نیوتنی یا طولی (Newtonian or longitudinal gauge.) می‌گویند. ناظر میدان سرعت خاصه ذرات ماده را خواهد دید که به سمت مرکز گرانش حرکت می‌کند. این پیمانه یکی از مشهورترین پیمانه‌ها است و دارای حد نیوتنی مناسبی نیز می‌باشد.

□ در پیمانه دیگری که به آن Comoving - proper time Gauge می‌گویند. مختصات را بر روی ذرات ماده در کیهان اختلالی قرار می‌دهیم به یک معنا ناظرها، سقوط آزاد free falling خواهند بود. و در نتیجه میدان سرعتی را مشاهده نخواهند کرد و حد نیوتنی نیز ندارد.

نکته بسیار مهم این است که در تبدیلات پیمانه‌ای دو فضا-زمان مجزا را (پس‌زمینه + اختلالی) که توسط یک ناظر دیده می‌شود را به هم ربط می‌دهیم. درحالی که تبدیل مختصه ناظرهای متفاوت در یک فضا-زمان را به یکدیگر ربط می‌دهد.

به این دلیل است که کمیت‌های اسکالر تحت تبدیلات پیمانه‌ای تغییر می‌کنند، درحالی که در تبدیل مختصات ناوردا هستند.

بحث پیمانه‌ها در فرصتی دیگر باز خواهیم گشت. مراجع مناسب برای تبدیلات پیمانه‌ای:

- J. M. Bardeen, Phys. Rev. D. 22 (1980), 1882
- H. Kodama & M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. 78 (1984), 1.
- G. F. R. Ellis & M. Bruni, Phys. Rev. D 40 (1989), 1804
- V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, & R. H. Brandenberger, Phys. Rept 215 (1992), 203
- J. C. Hwang and H. R. Noh, Phys. Rev. D 65 (2002), 023512
- A. R. Liddle & D. H. Lyth, Cosmological Inflation and Large Scale Structure, Cambridge University Press, 2000

در ادامه شکل کلی اختلالات مرتبه ۱ را انتخاب خواهیم کرد و سپس در پیمانه نیوتنی معادلات میدان اختلالی را خواهیم نوشت:

کلی‌ترین شکل متریک

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{که} \quad \delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & w_i \\ w_i & 2\Phi\delta_{ij} + h_{ij} \end{pmatrix}$$

تمام کمیت‌های اختلالی تابعی از فضا و زمان هستند.

Ψ, Φ اسکالر

w_i ۳-بردار

h_{ij} تانسور مرتبه ۳ بدون رد
traceless 3-tensor

$$ds^2 = a^2\left[-(1+2\Psi)d\eta^2 + 2w_i\, d\eta\, dx^i + \left((1+2\Phi)\delta_{ij} + h_{ij}\right)dx^i dx^j\right]$$

قبل از ادامه بحث، می خواهیم نشان دهیم که g_{00} یک اسکالر فضایی است.

اگر تبدیل مختصات کلی $\tilde{x}^{\mu} = f(x^{\mu})$ را در نظر بگیریم. تانسور متریک به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} g_{\alpha\beta}$$

اگر یک تبدیل فضایی خالص داشته باشیم

$$\tilde{x}^{0} = x^{0}, \qquad \tilde{x}^{i} = f(x^{i})$$

بلافاصله نتیجه می گیریم که

$$\tilde{g}_{00} = g_{00}$$

همانطور که برای اسکالر فضایی انتظار داشتیم.

درصورتی که متریک را به صورت $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ بنویسیم. از شرط $g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ خواهیم داشت:

$$\delta^{\beta}_{\alpha} = (g^{(0)}_{\alpha\gamma} + \delta g_{\alpha\gamma})(g^{(0)\gamma\beta} + \delta g^{\gamma\beta}) = \underbrace{g^{(0)}_{\alpha\gamma} g^{(0)\gamma\beta}}_{\delta^{\beta}_{\alpha}} + g^{(0)}_{\alpha\gamma} \delta g^{\gamma\beta} + g^{(0)\gamma\beta} \delta g_{\alpha\gamma} + \underbrace{\delta g_{\alpha\gamma} \delta g^{\gamma\beta}}_{\text{مرتبه دوم اختلال}}$$

(هردو تا یک سر بزنید)

در نتیجه →

$$0 = \left[g^{(0)}_{\alpha\gamma} \delta g^{\gamma\beta} + g^{(0)\gamma\beta} \delta g_{\alpha\gamma} \right] \times g^{(0)\mu\alpha}$$

$$0 = \underbrace{\underbrace{g^{(0)}_{\alpha\gamma} g^{(0)\mu\alpha}}_{\delta^{\mu}_{\gamma}} \times \delta g^{\gamma\beta}}_{\delta g^{\mu\beta}} + (\delta g_{\alpha\gamma}) g^{(0)\gamma\beta} g^{(0)\mu\alpha}$$

در نتیجه → $(\beta \equiv \nu), (\gamma \equiv \beta)$

$$\boxed{\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta} \, g^{(0)\alpha\mu} g^{(0)\beta\nu}}$$

حال به بررسی دقیق‌تر اختلالات برداری و تانسوری می‌پردازیم.

از قضیه هلمهولتز "Helmholtz's theorem"، هر بردار را می‌توان به مولفه طولی longitudinal و عرضی transverse جدا کرد.

$$w_i = w_i^{\parallel} + w_i^{\perp}$$

که

$$\vec{\nabla} \cdot w_i^{\perp} = 0 \quad , \quad \underbrace{\vec{\nabla} \times w_i^{\parallel} = 0}_{\text{longitudinal component being curl free}}$$

transverse component is divergent free.

در نتیجه $w_i^{\parallel} = \nabla w_s$ که اینجا یک کمیت اسکالر

در بدست آوردن معادلات میدان در مرتبه اختلالی، برای مولفه $(0i)$ در G_{0i} و T_{0i} مولفه‌های طولی و عرضی با هم ظاهر می‌شوند. حال اگر از معادله میدان کرل curl بگیریم فقط جمله عرضی باقی می‌ماند.
اگر از معادله میدان دیورژانس بگیریم فقط ترم "طولی" باقی می‌ماند.

در نتیجه دو مد طولی و عرضی از یکدیگر جدا می‌شوند و به صورت مستقل تحول پیدا خواهند کرد.

نکته مهم دیگر این است که تباین چگالی مولفه‌های کیهانی δ کمیت اسکالر است، از این رو تنها مولفه طولی بردار $w_i^{\parallel}$ می‌تواند دینامیک تباین چگالی را تحت تاثیر قرار دهد.

□ برای درجه آزادی تانسوری می‌توان جمله بدون رد h_{ij} را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$h_{ij} = h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^{T}$$

که $\partial^i h_{ij}^{\parallel}$, $\partial^i h_{ij}^{\perp}$ بردار هستند و ترم‌های طولی و عرضی هستند.

$$\underbrace{\epsilon_{ijk}\,\partial_i\,\partial_k\,h^{\parallel}_{ij} = 0}_{\text{کرل قسمت طولی } \partial_i h_{ij} \text{ صفر است}} \quad ; \quad \underbrace{\partial_i\,\partial_j\,h^{\perp}_{ij} = 0}_{\text{دیورژانس قسمت عرضی } \partial_i h^{\perp}_{ij} \text{ صفر است}}$$

h^{T}_{ij} is a Transverse part: $\partial_i h^{T}_{ij} = 0$

از آنجایی که $\partial_i h^{\parallel}_{ij}$ کرل-صفر است، می‌توان بر حسب یک میدان اسکالر B نوشت.

حال اگر $h^{\parallel}_{ij}$ را به صورت زیر تعریف کنیم در رابطه کرل-صفر صدق کند.

$$h^{\parallel}_{ij} = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right) B \equiv \underbrace{D_{ij}}_{\text{Traceless operator}}\, B$$

$$\epsilon_{ijk}\,\partial_i\,\partial_k\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right) B$$

$$= \left(\epsilon_{ijk}\,\partial_k\partial_j\partial_i - \frac{1}{3}\epsilon_{ijk}\,\delta_{ij}\,\partial_i\partial_k\nabla^2\right) B = 0$$

درصورتی که h^{T}_{ij} , $h^{\perp}_{ij}$ را نمی‌توان از یک اسکالر به دست آورد.

$h^{\perp}_{ij} \to$ - برداری است و باعث چرخش سیستم می‌شود

$h^{T}_{ij} \to$ - موجودی تانسوری است که عامل امواج گرانشی است

هر دو ترم برداری و تانسوری از اختلالات اسکالر جدا می‌شود

مد تانسوری در صورتی با تباین چگالی ماده جفت می‌شود که ناهمسانگردی وجود داشته باشد.

در غیر این صورت در بررسی رشد تباین چگالی می‌توان از مدهای برداری و تانسوری صرف نظر کرد.

از این رو باید جملات اسکالر w_i و h_{ij} را در نظر بگیریم. با تعریف دو اسکالر جدید B , E

که ترم برداری $E_{,i}$ و تانسوری $D_{ij}B$ را تولید کنند.

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & E_{,i} \\ E_{,i} & 2\Phi\,\delta_{ij} + D_{ij}B \end{pmatrix}$$

- هدف بعدی این است که از کمیت‌های اسکالر Ψ, Φ, E, B کمیت پیمانه ناوردا Gauge-Invariant ساخته شود که تحت تبدیل دیفرانسیلی

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

بدون تغییر باقی می‌ماند.

اسکالرها	بردارها	تانسور
Ψ	$\partial^i h^{\perp}_{ij}$	h^T_{ij}
Φ	$w_i^{\perp}$	
E		
B		

۱۰ درجه آزادی $\equiv$ ۲ درجه آزادی + ۴ درجه آزادی + ۴ درجه آزادی

برای بررسی رشد اختلالات و دینامیک آن‌ها، ساده‌تر است که با انتخاب یک پیمانه مشخص، ضرب و تقسیم را در آن پیمانه انجام دهیم. به طور مثال در پیمانه نیوتنی

$$w_i = 0 \rightarrow E = 0$$

$$B = 0$$

Newtonian or Longitudinal or shear-free gauge:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\Psi)\,d\eta^2 + (1+2\Phi)\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j\right].$$

۱۰ درجه آزادی متریک $\frac{4\times 4-4}{2}+4=10$: $g_{\mu\nu}$ (بخاطر تقارن متریک)

به 4 درجه اسکالر، 4 درجه بردار، و 2 درجه تانسور تجزیه شد. به این عمل SVT می‌گویند.

Scalar-Vector-Tensor (SVT) decomposition

یک بار دیگر تاکید کنیم که فایده تجزیه SVT این است که معادلات انیشتین در مرتبه اول اختلال، برای اسکالر، بردار و تانسور قابل تجزیه و واجفتیده است.

برای این که مسئله پیمانه و درجه آزادی پیمانه‌ای را بهتر مطالعه کنیم مثال زیر را استفاده می‌کنیم. ممکن است با تبدیل مختصات در شکل متریک جملات اختلالی ظاهر شود که واقعی نباشند.

□ فرض کنید مختصات فضایی به صورت زیر تغییر کند.

$$x^i \mapsto \tilde{x}^i = x^i + \xi^i(\tau, \vec{x})$$

زمان همدیس

, ξ^i is small, so it can be treated as a perturbation.

$$dx^i = d\tilde{x}^i - \partial_\tau \xi^i \, d\tau - \partial_k \xi^i \, d\tilde{x}^k \rightarrow \text{FRW}$$

جایگذاری در تعریف FRW

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[d\tau^2 - \delta_{ij}\, dx^i dx^j\right] = a^2(\tau)\left[d\tau^2 - \delta_{ij}\left(d\tilde{x}^i - \partial_\tau \xi^i d\tau - \partial_k \xi^i d\tilde{x}^k\right)\left(d\tilde{x}^j - \partial_\tau \xi^j d\tau - \partial_k \xi^j d\tilde{x}^k\right)\right]$$

$$= a^2(\tau)\left[d\tau^2 - 2\xi_i' \, d\tilde{x}^i d\tau - d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j\left(\delta_{ij} + 2\,\frac{1}{2}\left(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i\right)\right)\right]$$

در نتیجه با مقایسه با متریک SVT خواهیم داشت.

$$w_i = -\xi_i' \qquad h_{ij} = \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i \qquad \text{که } \xi_i' = \partial_\tau \xi_i$$

که این اختلال واقعی نیست و به خاطر تغییر مختصات است.

به طور مشابه، با تغییر زمان مختصاتی $\tau \mapsto \tau + \xi^0(\tau, \vec{x})$ ، چگالی همگن

کیهان نیز مختل خواهد شد

$$\rho(\tau) \to \rho(\tau + \xi^0(\tau,\vec{x})) = \bar{\rho}(\tau) + \bar{\rho}' \xi^0$$

بدین معنا که کیهان مختل شده نیز با تغییر زمان دارای اختلال $\delta\rho = \bar{\rho}' \xi^0$ خواهد بود.

به طور مشابه می توان اختلال واقعی را با تغییر مختصه زمان صفر کرد.

مثال های فوق، نشان می دهد که چگونه مسئله تغییر مختصات و اختلالات واقعی دچار تبهگنی هستند از این رو باید مکانیزم فیزیکی را تعریف کنیم که اختلالات فیزیکی را تشخیص دهیم

☐ تبدیلات پیمانه ای "Gauge Transformation"

تغییر مختصات زیر را در نظر بگیرید.

$$X^\mu \to \tilde{X}^\mu \equiv X^\mu + \xi^\mu(\tau, \vec{x})$$

که $\xi^0 \equiv T \quad , \quad \xi^i \equiv L^i = \underbrace{\partial^i L}_{\text{اسکالر}} + \hat{L}^i$

$\hat{L}^i \downarrow$ "divergence vector"

ابتدا به بررسی تغییر متریک تحت این تبدیل می پردازیم.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(X)\, dX^\mu dX^\nu = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\, d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta$$

با توجه $d\tilde{x}^\alpha = \dfrac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \xrightarrow{\text{در نتیجه}} g_{\mu\nu}(X) = \dfrac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial X^\mu} \cdot \dfrac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{X})$

حال باید بررسی کنیم که رابطه تبدیل متریک فوق چه تغییری بر روی متریک اختلالی خواهد داشت:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\psi)\, d\eta^2 + 2w_i\, d\eta\, dx^i + \left((1+2\phi)\delta_{ij} + h_{ij}\right) dx^i dx^j\right]$$

$\tau = \eta$ زمان همراه

Daniel Baumann

برای نشان دادن تبدیلات پیمانه‌ای بر روی مولفه‌ها تفکیکی از درسنامه

www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf

استفاده می‌کنیم. تفکیک حل شده

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[(1+2A)\,d\tau^2 - 2B_i\,dx^i d\tau - (\delta_{ij} + h_{ij})\,dx^i dx^j\right]$$

SVT - decomposition:

$$B_i = \underbrace{\partial_i B}_{\text{scalar}} + \underbrace{\hat{B}_i}_{\text{vector}}$$

$\hat{B}_i$: divergence - vector بدون دیورژانس صفر است یعنی ^ به معنی

$$\partial^i \hat{B}_i = 0$$

به طور مشابه تانسور متقارن رتبه ۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$h_{ij} = \underbrace{2C\,\delta_{ij} + 2\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle}E}_{\text{scalar}} + \underbrace{2\partial_{(i}\hat{E}_{j)}}_{\text{vector}} + \underbrace{2\hat{E}_{ij}}_{\text{tensor}}$$

که

$$\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle}E \equiv \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)E$$

$$\partial_{(i}\hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i\right)$$

به طور مشابه کمیت‌های ^ دار دیورژانس صفر دارند.

$$\partial^i\hat{E}_i = 0 \quad \& \quad \partial^i\hat{E}_{ij} = 0$$

اضافه تانسور $\hat{E}^i_i = 0$ رد صفر دارند.

در نتیجه ۱۰ درجه آزادی متریک را به $4+4+2$ درجه SVT به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

scalars : A, B, C, E

Vectors : $\hat{B}_i, \hat{E}_i$

tensors : $\hat{E}_{ij}$

حال در رابطه تبدیل

$$g_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})$$

حال به طور مثال جمله 0-0 :

$$g_{00}(x) = \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau}\right)^2 \tilde{g}_{00}(\tilde{x})$$

با جایگذاری متریک

$$a^2(\tau)(1+2A) = (1+T')^2 a^2(\tau+T)(1+2\tilde{A})$$

$$= (1+2T'+\cdots)(a(\tau)+a'T+\cdots)^2(1+2\tilde{A})$$

$$= a^2(\tau)(1+2\mathcal{H}T+2T'+2\tilde{A}+\cdots)$$

که $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ Conformal Hubble,

در نتیجه در حد خطی A به صورت زیر تبدیل می‌شود.

برای دیگر مولفه‌ها متریک خواهیم داشت

$$\begin{cases} A \mapsto \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T \\ B_i \longmapsto \tilde{B}_i = B_i + \partial_i T - L_i' \\ h_{ij} \longmapsto \tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_{(i}L_{j)} - 2\mathcal{H}T\delta_{ij} \end{cases}$$

In terms of SVT - decomposition

$$\underbrace{\begin{cases} A \mapsto A - T' - \mathcal{H}T \\ B \mapsto B + T - L' \\ C \mapsto C - \mathcal{H}T - \frac{1}{3}\nabla^2 L \\ E \mapsto E - L \end{cases}}_{\text{اسکالر}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \hat{B}_i \mapsto \hat{B}_i - \hat{L}_i' \\ \hat{E}_i \longmapsto \hat{E}_i - \hat{L}_i \end{cases}}_{\text{بردار}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \hat{E}_{ij} \mapsto \hat{E}_{ij} \end{cases}}_{\text{تانسور}}$$

حال به بررسی رشد ساختارها در پیمانه نیوتنی می پردازیم

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\Psi)\,d\eta^2 + (1+2\Phi)\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j\right]$$

نکته: به نشانگان متریک $(-,+,+,+)$ و علامت Φ توجه کنید. در بعضی از مقالات، نوشته‌ها علامت Φ با منفی است.

- Luca Amendola & Shinji Tsujikawa, Dark Energy, Cambridge Uni Press, 2010
- Scott Dodelson, Modern Cosmology, Academic Press, 2003

برای بررسی رشد ساختارها معادلات انیشتین را تا مرتبه ۱ مختل می‌کنیم. بدین معنا که تانسور انیشتین و تانسور انرژی-تکانه را مختل می‌کنیم.

$$G^{\mu}_{\ \nu} = G^{\mu(0)}_{\ \nu} + \delta G^{\mu}_{\ \nu} \quad \& \quad T^{\mu}_{\ \nu} = T^{\mu(0)}_{\ \nu} + \delta T^{\mu}_{\ \nu}$$

در نتیجه پس زمینه‌مان با حل معادله انیشتین در مرتبه صفر به دست می‌آید

$$G^{\mu(0)}_{\ \nu} = 8\pi G\, T^{\mu(0)}_{\ \nu}$$

معادله مرتبه یک انیشتین از رابطه روبرو به دست می‌آید.

$$\delta G^{\mu}_{\ \nu} = 8\pi G\, \delta T^{\mu}_{\ \nu}$$

برای محاسبه سمت چپ معادله (تانسور مختل شده انیشتین) باید نماد کریستوفل مختل شده

$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ perturbed Christoffel Symbol را می‌نویسیم

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,\delta g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}\right) + \frac{1}{2}\,g^{\mu\alpha}\left(\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha}\right)$$

حال با استفاده از متریک مختل شده در پیمانه نیوتنی

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\Psi)\,d\eta^2 + (1+2\Psi)\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j\right]$$

المان‌های غیر صفر نماد کریستوفل

$$\begin{cases} \delta\Gamma^{0}_{ij} = \delta_{ij}\left[2\mathcal{H}(\Phi-\Psi) + \Phi'\right] \\ \delta\Gamma^{0}_{00} = \Psi' \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\Gamma^{0}_{0i} = \delta\Gamma^{i}_{00} = \Psi_{,i} \\ \delta\Gamma^{i}_{j0} = \delta^{i}_{j}\,\Phi' \end{cases}$$

- مشتق نسبت به زمان همراه

- پارامتر هابل همراه

$$\mathcal{H} = aH$$

تانسور ریچی

در ادامه باید اختلال تانسور ریچی را بررسی کنیم

$$R^{\alpha}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}$$

(تانسور ریمان را می‌توان به ریچی تبدیل کرد) تنجش:

$\alpha = \lambda$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}$$

وردش تانسور ریچی:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}$$

وردش اسکالر ریچی:

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha}\delta R_{\alpha\mu}$$

حال با به دست آوردن اختلال در تانسور و اسکالر ریچی، اختلال در تانسور انشتین برابر خواهد بود با

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta R$$

و به تبع آن:

$$\delta G^{\mu}_{\nu} = \delta g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta G_{\alpha\nu}$$

حال به عنوان نمونه $\delta G^{0}_{\ 0}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta G^{0}_{\ 0} = \underbrace{\delta g^{0\alpha}}_{\text{ترم ۱}} \underbrace{G_{\alpha 0}}_{\text{ترم ۲}} + \underbrace{g^{0\alpha}}_{\text{ترم ۳}} \underbrace{\delta G_{\alpha 0}}_{\text{ترم ۴}}$$

(ترم ۱): با توجه به تعریف اختلال در مشترک

$$\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta}\, g^{(0)\alpha\mu}\, g^{(0)\beta\nu}$$

جانشانی

$$\delta g^{0\alpha} = -\delta g_{\mu\nu}\, \underbrace{g^{(0)\mu 0}}_{\text{ترم غیر صفر}}\, g^{(0)\nu\alpha} = -\delta g_{00}\, g^{(0)00}\, g^{(0)00}$$

$\mu = 0$

$$= (2a^2\Psi)(-a)^{-2}(+a)^{2} = \frac{2\Psi}{a^2}$$

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu\,(0)} = a^{-2} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

(ترم ۲): $\Longrightarrow$ $\alpha = 0$ ، در نتیجه

[illegible]

$$\begin{cases} G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \qquad ; \qquad R = 6(2H^2 + \dot{H}) \\ R_{00} = -3(H^2 + \dot{H}) \\ G_{00} = -3H^2 - 3\dot{H} - \frac{1}{2}(-1)\left[12H^2 + 6\dot{H}\right] = 3H^2 = \frac{3H^2}{a^2} \end{cases}$$

(ترم ۳) g^{00} $\times$ (ترم ۴) δG_{00}

$$\underbrace{g^{00}}_{a^{-2}(-1)} \qquad \delta G_{00} = \delta R_{00} - \frac{1}{2}\delta g_{00} R - \frac{1}{2} g_{00}\, \delta R$$

برای محاسبه ترم ۳ و ترم ۴ :

$$\delta R_{00} = \overset{\text{ترم ۱}}{\delta\Gamma^{\alpha}_{00,\alpha}} - \overset{\text{ترم ۲}}{\delta\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0}} + \overset{\text{ترم ۳}}{\delta\Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}} + \overset{\text{ترم ۴}}{\Gamma^{\alpha}_{00}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}}$$

$$- \overset{\text{ترم ۵}}{\delta\Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0}} - \overset{\text{ترم ۶}}{\Gamma^{\alpha}_{0\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha 0}}$$

$$= \underbrace{\cancel{\delta\Gamma^{0}_{00,0}} + \delta\Gamma^{i}_{00,i}}_{\text{ترم ۱}}{}^{*} - \underbrace{\cancel{\delta\Gamma^{0}_{00,0}} - \delta\Gamma^{i}_{0i,0}}_{\text{ترم ۲}}{}^{*}$$

ترم ۳ $$+ (\delta\Gamma^{0}_{00})\cancel{(\Gamma^{0}_{00})} + (\delta\Gamma^{0}_{00})(\Gamma^{i}_{0i})^{*} + (\delta\Gamma^{i}_{00})\cancel{(\Gamma^{0}_{i0})}$$

ترم ۴ $$+ \cancel{(\Gamma^{0}_{00})(\delta\Gamma^{0}_{00})} + (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\Gamma^{0}_{00}})(\delta\Gamma^{i}_{0i}) + (\Gamma^{i}_{00})\cancel{(\delta\Gamma^{0}_{i0})}$$

ترم ۵ $$-\cancel{(\delta\Gamma^{0}_{00})(\Gamma^{0}_{00})} - (\delta\Gamma^{i}_{00})\cancel{(\Gamma^{0}_{i0})} - \cancel{(\delta\Gamma^{i}_{0j})(\Gamma^{j}_{i0})} - (\delta\Gamma^{0}_{0i})(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\Gamma^{i}_{00}})$$

ترم ۶ $$-\cancel{(\Gamma^{0}_{00})(\delta\Gamma^{0}_{00})} - (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\Gamma^{0}_{0i}})(\delta\Gamma^{i}_{00}) - (\Gamma^{i}_{00})\cancel{(\delta\Gamma^{0}_{i0})} - \cancel{(\Gamma^{i}_{0j})(\delta\Gamma^{j}_{i0})}$$

$$= \underbrace{\Psi_{,i}{}^{i}}_{\nabla^2\Psi} - 3\Phi'' + \Psi'(3H)$$

حال در عبارت بعدی ترم ۳ و ۴ را محاسبه خواهیم کرد.

با توجه به این : $\Gamma^{i}_{0j} = \Gamma^{i}_{j0} = H\delta^{i}_{j}$ & $\Gamma^{0}_{00} = 0$ & $\Gamma^{0}_{0i} = 0$ & $\Gamma^{i}_{00} = 0$

$$-\frac{1}{2}\delta g_{00} R = -\frac{1}{2} a^2 (2\Phi)\, 6\,(2H^2+\dot H)$$

$$-\frac{1}{2} g_{00}\,\delta R = -\frac{1}{2} a^2 (-1)\left(\delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha}\,\delta R_{\alpha\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(\delta g^{00} R_{00} + \delta g^{ii} R_{ii} + g^{00}\,\delta R_{00} + g^{ii}\,\delta R_{ii}\right)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \Big(-a^{-2}(2\Psi)\big((-3)(H^2+\dot H)\big) + a^{-2}\, 2\Phi\, (\delta^{ii})$$

$$\times\, a^2 (3H^2+\dot H)\,\delta_{ii} + (-a^{-2})\,\delta R_{00} + (a^{-2})\,\delta R_{ii}\Big)$$

از صفحه قبل محاسبه شده است.

باید محاسبه شود.

حال به محاسبه δR_{ii} می‌پردازیم.

از ۱ — از ۲

$$\delta R_{ii} = \delta\Gamma^{\alpha}_{ii,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{i\alpha,i}$$

از ۳ — از ۴ — از ۵

$$+\,\delta\Gamma^{\alpha}_{ii}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \delta\Gamma^{\alpha}_{i\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\alpha i} - \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha i}$$

از ۱ — از ۲

$$= \left(\delta\Gamma^{0}_{ii}\right)_{,0} - \left(\delta\Gamma^{0}_{i0,i}\right)$$

از ۳ — از ۴ — از ۴

$$+\,\delta\Gamma^{0}_{ii}\,\Gamma^{j}_{0j} + \Gamma^{0}_{ii}\,\delta\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{0}_{ii}\,\delta\Gamma^{j}_{0j}$$

از ۵ — از ۵ — از ۵ — از ۵

$$-\left(\delta\Gamma^{0}_{i0}\right)\underbrace{\Gamma^{0}_{0i}}_{=0} - \left(\delta\Gamma^{0}_{ij}\right)\Gamma^{j}_{0i} - \delta\Gamma^{j}_{i0}\,\Gamma^{0}_{ji} - \underbrace{\delta\Gamma^{j}_{iK}}_{=0}\,\Gamma^{K}_{ji}$$

از ۶ — از ۶ — از ۶ — از ۶

$$-\,\Gamma^{0}_{i0}\,\delta\Gamma^{0}_{0i} - \Gamma^{0}_{ij}\,\delta\Gamma^{j}_{0i} - \Gamma^{j}_{i0}\,\delta\Gamma^{0}_{ji} - \Gamma^{j}_{iK}\,\underbrace{\delta\Gamma^{K}_{ji}}_{=0}$$

با ترکیب تمام جملات محاسبه شده جمله δG^{0}_{0} و بقیه ترم های تانسور انیشتین به صورت زیر به دست می آید.

$$\delta G^{0}_{0} = 2a^{-2}\left[3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^{2}\Phi\right]$$

$$\delta G^{0}_{i} = 2a^{-2}\left[(\Phi' - \mathcal{H}\Psi)_{|i}\right]$$

$$\delta G^{i}_{j} = 2a^{-2}\left[(\mathcal{H}^{2} + 2\mathcal{H}')\Psi + \mathcal{H}\Psi' - \Phi'' - 2\mathcal{H}\Phi'\right]\delta^{i}_{j}$$

$$+ a^{-2}\left[\nabla^{2}(\Psi + \Phi)\delta^{i}_{j} - (\Psi + \Phi)_{|}{}^{i}{}_{j}\right]$$

| نشانگر مشتق هموردا نسبت به مولفه فضایی است با ترکیب ۳ بعدی فضایی و $\nabla^{2} f \equiv f_{;\mu}{}^{\mu}$

با مشخص شدن نوع تانسور انرژی-تکانه و با جایگذاری در معادله اختلالی $\delta G^{\nu}_{\mu} = 8\pi G T^{\nu}_{\mu}$ می توان معادله انیشتین را در گستره اختلالی به دست آورد. بررسی تانسور انرژی-تکانه سیال های تک مولفه ای و معادلات موضوع در رساله مجزا است.

نکته مهم این که تانسور انرژی-تکانه در معادله پیوستگی صدق می کند

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

در مرتبه اول رابطه فوق نیز معادلات مهمی را به دست می دهد

$$\delta T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

برای بررسی معادله پیوستگی در مرتبه خطی باید چهار سرعت را نیز تحلیل کنیم

$$u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

با صرف نظر کردن از ترم های مرتبه ۲

$$u^{\mu} = \left[\frac{1}{a}(1-\Psi) , \frac{v^i}{a} \right]$$

که

$$v^i = \underbrace{\frac{dx^i}{d\eta}}_{\text{سرعت نسبت به زمان همراه}} = a \frac{dx^i}{dt}$$

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu} u^{\nu} = \left[-a(1+\Psi) , a v_i \right]$$

$$u_{\mu} u^{\mu} = -1 \qquad \text{where} \qquad u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

نکته مهم این سرعت خاصه مولفه های تشکیل دهنده جهان خود باعث تصحیح اندازه گیری فواصل در جهان می شوند، که موضوع بحث مجزایی است.

در درسنامه بعد بحث اختلالات کیهانی را دنبال خواهیم کرد و به بحث تبدیلات پیمانه ای و کمیات پیمانه ناوردا باز خواهیم گشت.