طیف توان و تابع همبستگی کهکشان‌ها

کهکشان‌ها به صورت تصادفی (random) پخش نشده‌اند، آن‌ها تشکیل گروه کهکشانی، خوشه، ابرخوشه، دیواره و رشته‌ها و تهی‌ها را می‌دهند.

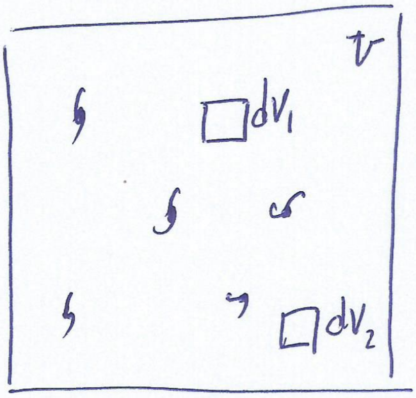
یکی از سوالات مهم کیهان‌شناسی بررسی خوشگی ساختارها (کهکشان‌ها) است که اطلاعاتی درباره مدل‌های کیهان‌شناسی، مولفه‌های تشکیل‌دهنده کیهان و تحول آن‌ها به دست می‌دهد.

برای بررسی این خوشگی باید آمار دو نقطه، سه نقطه‌ای و بالاتر را بررسی کنیم.

فرض کنید در حجم V، تعداد N کهکشان نوع خاص را رصد کنیم.

حال دو حجم کوچکتر به حجم ΔV_1 و ΔV_2 را انتخاب می‌کنیم.

درصورتی که توزیع کهکشان‌ها کاملاً یکنواخت باشد



$$P_{\Delta V_1} = \frac{n\,\Delta V_1}{N} = \frac{\Delta V_1}{V}$$

احتمال پیدا کردن کهکشان در حجمی با حجم ΔV_1

پس احتمال پیدا کردن کهکشان در حجم ΔV_1 و ΔV_2 به طور همزمان در توزیع یکنواخت برابر خواهد بود با

$$\Delta P_{uniform} = \frac{\Delta V_1}{V} \times \frac{\Delta V_2}{V}$$

2,

حال درصورتی که توزیع کهکشان ها یکنواخت نباشد و دارای خوشگی باشد در این صورت احتمال همبسته به صورت زیر خواهد بود.

$$\Delta P = \left[1 + \xi_g(r) \right] \frac{\Delta V_1}{V} \cdot \frac{\Delta V_2}{V}$$

r: فاصله بین دو حجم ΔV_1 ، ΔV_2 می باشد؛ ξ_g را تابع همبستگی Correlation function می گویند. درصورتی که $\xi_g > 0$ باشد به معنای همبستگی مثبت است و بدین معنا که احتمال پیدا کردن کهکشان در فاصله r در دو حجم انتخابی بزرگتر از حالت یکنواخت uniform خواهد بود.

$\xi_g < 0$ به معنی همبستگی منفی anti-correlation است.

تابع همبستگی در مساحی ها ی بزرگ مقیاس کهکشانی محاسبه می شود. در مقیاس های کوچک تر از $10h^{-1}$ Mpc تابع همبستگی دو نقطه ای را می توان با تابع توانی به شکل زیر توضیح داد.

$$\xi_g(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$$

که $\gamma > 0$ و r_0 طول همبستگی (correlation length) ثابت؛ γ ، r_0 پارامترهای آزاد تابع برازش هستند که با داده ها ی رصدی به دست می آیند.

در مقیاس های $r < r_0$ ، تابع همبستگی مثبت است و احتمال پیدا کردن کهکشان از حالت یکنواخت بیشتر است.

از آن جائی که ξ_g به گونه ای انحراف از حالت میانگین را می دهد، از این رو باید در فواصلی ξ_g منفی باشد. به معنای انتگرال تابع همبستگی بر روی تمام فواصل باید صفر باشد.

$$\int \xi_g(r)\, d^3r = 4\pi \int_0^{\infty} \xi_g(r)\, r^2\, dr = 0$$

مساحی 2-degree-Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS) که در ابتدا 2000s انجام شد $r_0 \approx 5h^{-1}\,\mathrm{Mpc}$ و $\gamma \approx 1.7$ برای نمونه‌ای از 200,000 کهکشان بدست آورد. در مقیاس‌های بزرگ $50\,h^{-1}\,\mathrm{Mpc}$، تابع همبستگی دو نقطه‌ای حول صفر نوسان می‌کند این بدین معناست که در این مقیاس تعداد کهکشان‌ها به حالت متفاوت، میانگین گرایش می‌دارند.

□ طیف توان:

خوشگی کهکشان‌ها را می‌توان در فضای فوریه بررسی کرد. طیف توان (Power Spectrum)، تبدیل فوریه تابع همبستگی است.

$$P_g(k) = \int d^3r\, \xi_g(r)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

تاکنون فرض کرده‌ایم که نمونه کهکشانی مورد مطالعه همسانگرد باشد، بدین معنی که تابع همبستگی تابع جهت $\vec{r}$ نیست و فقط به اندازه r بستگی دارد. در نتیجه می‌توان انتگرال تحت فضایی را گرفت با این ساده‌سازی که $\vec{r}$ در جهت محور z انتخاب شده است.

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$$ در نتیجه

$$P_g(k) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \xi_g(r)\, e^{-ikr\cos\theta}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r^2 dr\, \xi_g(r) \int_0^{\pi} -d(\cos\theta)\, e^{-ikr\cos\theta}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r^2 dr\, \xi_g(r) \frac{1}{ikr}\left[e^{ikr} - e^{ikr}\right]$$

4/

با توجه $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

طیف توان توزیع همبستگی

MD

$$\boxed{P_g(k) = 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \xi_g(r)\, \frac{\sin(kr)}{kr}}$$

توجه داشته باشید

$$k \to 0: \quad \frac{\sin(kr)}{kr} \to 1 \to P_g(k=0) = 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2\, \xi_g(r) = 0$$

برای تابع همبستگی دو نقطه ای توانی، طیف توان نیز توانی خواهد بود.

فرض کنید، طیف توان به صورت $\xi_g(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-(3+n)}$ باشد که $n < 0$ در این صورت خواهیم داشت:

$$P_g(k) \approx 4\pi \left(\frac{1}{r_0}\right)^{-(3+n)} \int_0^{1/k} dr\, r^{-1-n} = \frac{4\pi}{|n|} \left(\frac{1}{r_0}\right)^{-(3+n)} k^n$$

برای $3 + n = \gamma = 1.5 \to n = -1.5 \to P_g \propto k^{-1.5}$

این نتیجه برای $r < 10\, h^{-1}\, \mathrm{Mpc}$ صادق است که $k > 0.1\, h\, \mathrm{Mpc}^{-1}$ که این مقیاس غیرخطی باشد.

تابع همبستگی دو نقطه ای و طیف توان را می توان به شکل دیگری نیز محاسبه کرد.

فرض کنید δ_g تباین چگالی عددی کهکشان ها در جعبه ΔV باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\delta_g(\vec{x}) = \frac{n(\vec{x}) - \bar{n}}{\bar{n}}$$

که $\bar{n}$ چگالی متوسط کهکشان ها است.

حال تابع همبستگی دو نقطه ای را به صورت حاصلضرب تباین δ_g در دو نقطه به فاصله r تعریف می کنیم

که در حجم متوسط گیری شده است.

$$\xi_g(r) = \langle \delta_g(\vec{x})\, \delta_g(\vec{x}+r) \rangle_x$$

که $\langle \quad \rangle_x$ به معنا متوسط گیری فضایی است.

که به شکل انتگرالی می توان به صورت روبرو نیز نوشت.

$$\xi_g = \frac{1}{V}\int d^3x\, \delta_g(\vec{x})\, \delta_g(\vec{x}+r)$$

نکته مهم این است که باید توجه کنیم که به تباین چگالی عددی دریک حجم ΔV محاسبه می شود که به آن

اثر تابع پنجره می گویند که در ادامه در مورد آن بحث خواهیم کرد. (V حجم مساحی است)

حال می توان هر تباین چگالی را در فضای فوریه نوشت:

$$\delta_g(\vec{x}) = \frac{1\,(V)}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \delta(\vec{k})$$

با جایگذاری در تعریف تابع همبستگی خواهیم داشت:

$$\xi_g = \frac{1}{V}\int d^3x\, \frac{V}{(2\pi)^3}\, \frac{V}{(2\pi)^3} \iint d^3k\, d^3k'\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})}\, \delta(k)\,\delta(k')$$

در این جا فرض کرده ایم که تباین چگالی کمیت حقیقی است.

6/

$$\rightarrow \xi_g = \frac{1}{V}\frac{V^2}{(2\pi)^6}\int d^3x \int d^3k \int d^3k' \, e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}+\vec{k}')} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \delta(k)\delta(k')$$

تعریف تابع دلتای دیراک

$$\delta_D(\vec{k}+\vec{k}') = \int d^3x \, e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

سپس با انتگرال گیری بر روی k' خواهیم داشت

$$\xi_g = \frac{1}{V}\frac{V^2}{(2\pi)^3}\int d^3k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta(k)\delta(k)$$

$= $ تعریف طیف توان $\quad P(\vec{k}) = V|\delta_k|^2$

توجه داشته باشید که طیف توان بُعد حجم دارد.

$$\boxed{\xi_g(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} P(k)}$$

تابع دو نقطه تبدیل فوریه طیف توان است.

☐ چند نکته درباره تبدیل فوریه

درصورتی که بخواهیم $f(x)$ ، $\tilde{f}(k)$ هم بعد باشند ، تبدیل فوریه را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int \tilde{f}(k) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{V}\int f(x) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x$$

در این صورت هم بعدند ، در محاسبات کیهان شناسی اغلب $V=1$ در نظر می گیریم.

نکته بعدی این است که ضرایب انتگرال های فوریه در $3D$ باید $(2\pi)^{-3}$ باشد.

نکته بعدی درباره طیف توان این است که این کمیت را می‌توان برای کمیت‌های موهومی به شکل زیر تعریف کرد.

$$P(\vec{k}) = V\, \delta_k\, \delta_k^*$$

تعریف کامل‌تر از طیف توان به صورت میانگین گیری ان‌سمبلی ENSEMBLE AVERAGE است.

بدین ترتیب که از یک میدان تصادفی، نمونه‌های متفاوتی داریم "Different realizations"

و بر روی کمیت زیر متوسط گیری می‌کنیم.

$$V \times \frac{1}{V}\int(\;)\,\frac{1}{V}\int(\;)$$

$$\underbrace{V\langle \delta_k\, \delta_{k'}^* \rangle}_{\text{متوسط گیری ان‌سمبلی}} = \underbrace{\frac{1}{V}}_{\text{تبدیل فوریه هر کدام از میدان‌ها}} \int \langle \delta(x)\,\delta(y)\rangle\, e^{-ikx}\, e^{ik'y}\, \underbrace{dV_x}_{\text{حجم در فضای حقیقی}}\, dV_y$$

حال $x \equiv y + r$

$$\rightarrow \; = \frac{1}{V}\int \underbrace{\langle \delta(y)\,\delta(y+r)\rangle}_{\xi(r)\ \text{تعریف تابع همبستگی}}\, e^{-i(k-k')y}\, e^{-ikr}\, dV_r\, dV_y$$

$$= \frac{1}{V}\underbrace{\int e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot y}\, dV_y}_{(2\pi)^3\,\delta_D(\vec{k}-\vec{k}') \ \equiv\ \text{تعریف تابع دلتای دیراک در فضای فوریه}}\ \underbrace{\int e^{-ikr}\,\xi(r)\, dV_r}_{\text{تعریف طیف توان}}$$

$$\longrightarrow \quad V\langle \delta_k\, \delta_{k'}^* \rangle = \frac{1}{V}(2\pi)^3 P(k)\, \delta_D(\vec{k}-\vec{k}')$$

حال سؤال مهم این است که چگونه مشاهدات رصدی مربوط به خوشگی کهکشان را به پیش بینی مدل های کیهان شناسی ربط دهیم. بیشتر ماده کیهان از ماده تاریک است، درحالی که ماده ای روشن (کهکشان ها) از باریون ها هستند. حال سؤال تبدیل می شود به برقراری ارتباط بین ماده تاریک و ماده باریونی

حتما ارتباطی بین خوشگی ماده تاریک و ماده باریونی وجود دارد ولی این ارتباط واحد نیست.

این رابطه را با کمیت سوگیری (بایاس BIAS PARAMETER) نشان می دهند که

که δ_m تباین چگالی ماده تاریک است.

$$b = \delta_g / \delta_m$$

بایاس می تواند کمیت پیچیده ای باشد که بستگی به مقیاس، زمان بررسی ارتباط ماده تاریک و روشن، نوع ماده باریونی (کهکشان قرمز، آبی، مارپیچی، ...) محیط، ... باشد.

البته در مقیاس های بزرگ و در انتقال به سرخ $z \simeq 0$ انتظار داریم $b \sim cte$ باشد.

$b > 1$ بدین معنی است که کهکشان ها خوشگی بیشتری نسبت به ماده تاریک دارند.

بررسی سوگیری (بایاس) یکی از مهم ترین بخش های تشکیل ساختار کیهانی است که در بخش های بعد به بررسی آن خواهیم پرداخت.

سرعت خاصه

همان طور که در ابتدا اشاره کردیم موقعیت کهکشان ها در آسمان را با ۳ مختصه (X, Y) در صفحه آسمان و Z (انتقال به سرخ) مشخص می‌شود. در صورتی که کیهان کاملاً همگن و همسانگرد باشد انتقال به سرخ کهکشان ها که از طیف سنجی بدست می آید، انتقال به سرخ کیهانی خواهد بود

$$1 + Z = \frac{a_0 = 1}{a}$$

در حالی که کهکشان داخل سیستم های گرانشی مانند گروه کهکشانی، خوشه کهکشانی هستند، علاوه بر سرعت انبساط هابل، دارای سرعت خاصه نیز می باشند

برای محاسبه سرعت خاصه از تعریف طول فیزیکی داریم.

طول همراه

$$r = a x \quad \longrightarrow \quad \dot{r} = \frac{\dot{a}}{a}(a x) + a \dot{x}$$

طول فیزیکی

$$\dot{r} = v = H r + a(t)\, u = H r + \delta v$$

سرعت فیزیکی — پارامتر هابل — سرعت خاصه همراه — سرعت خاصه فیزیکی

در نظریه اختلال خطی و رابطه پیوستگی ارتباط سرعت خاصه با تباین چگالی به صورت زیر است

$$\dot{\delta}_m = - \vec{\nabla}_c \cdot \vec{u}$$

" ° " مشتق نسبت به زمان فیزیکی است.

مشتق همراه Comoving coordinate

حال برای به دست آوردن ارتباط سرعت خاصه با تباین چگالی و تحول رشد اختلالات در کیهان،

معادله پیوستگی را در فضای فوریه می‌نویسیم:

$$\dot{\delta}_K(t) = -\frac{iK}{a} u \rightarrow u = \frac{i}{K} a \frac{d}{dt}(\delta_K)$$

مولفه سرعت خاصه $\vec{u}$ در جهت $\vec{K}$

در بخش اختلالات خطی دیدیم که تباین چگالی در فضای فوریه را به صورت

$$\delta_K = T(K) D(z) \delta^{\circ}_K$$

می‌توان نوشت که تابع $T(K)$ تابع انتقال Transfer function و $D(z)$

تابع رشد Growth function است. در انتقال به سرخ‌گرایی‌های $z<5$، تابع انتقال واحد است.

پس بستگی به زمان δ_K در تابع رشد است.

در کیهان‌شناسی کمیت مهم و قابل اندازه‌گیری آهنگ رشد f (Linear Growth rate) است

که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f = \frac{a}{D(a)} \frac{dD(a)}{da} = \frac{d\ln D}{d\ln a}$$

حال آهنگ تغییر را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dt}\delta_K = \delta_{\circ} \frac{d}{dt} D = \delta_{\circ} \frac{d}{da} D \frac{da}{dt} = \delta_{\circ} f \frac{D(a)}{a} \dot{a} = f \underbrace{D(a) H \delta_{\circ}}_{\delta}$$

در نتیجه سرعت خاصه

$$\rightarrow \boxed{u = \frac{i f a H \delta_K(a)}{K}}$$

اندازه گیری f از مساحی های بزرگ مقیاس، یکی از موضوعات روز است، برای جهان ΛCDM می توان نشان داد که

$$f \simeq \Omega_m(a)^{0.6}$$

که
$$\Omega_m(a) = \frac{\Omega_m^{\circ} a^{-3}}{H^2(a)}$$

Ω_m° : پارامتر چگالی ماده تاریک در زمان حال است

در جهان بسیار نزدیک $a \approx 1$ ، $H \approx H_0$ خواهیم داشت

$$u = i f H_0 \delta_K \frac{1}{K}$$

همچنین می توان نشان داد که $\vec{u}$ مولفه عمودی $\vec{K}$ ندارد در نتیجه در $z \approx 0$ خواهیم داشت

$$\vec{u} = i f H_0 \delta_K \frac{\vec{K}}{K^2}$$

محاسبه سرعت خاصه و ربط آن به تباین چگالی ماده این امکان را می دهد که تصحیح موقعیت کهکشان را از فضای انتقال به سرخ به فضای حقیقی را بررسی کنیم

این موضوع که به اعوجاج فضای انتقال به سرخ Redshift Space Distortion معروف است موضوع بخش بعدی است.

⚠ نکته مهم که باید توجه کرد این است که سرعت خاصه را با استفاده از نظریه اختلال خطی به دست آورده ایم. در نتیجه حوزه اعتبار آن در گستره خطی است.

در ادامه به بررسی اعوجاج فضای فاز خواهیم پرداخت.