سوگیری و توزیع هاله‌ها

ناپایداری‌های گرانشی، باعث ایجاد خوشگی در ناحیه‌ها متفاوت حجم همراه با تباین چگالی‌های متفاوت می‌شود.

از روش پرس شچتر Press-Schechter (1974) یا نظریه گشت Excursion Set theory می‌توان آمار ساختارها با جرم M را به دست آوریم. حال سؤال این است که تباین چگالی هاله‌های شکل گرفته، چه ارتباطی با تباین چگالی ماده تاریک اولیه دارد. این ارتباط به اسم سوگیری هاله‌ها 'HALO BIAS' معرفی می‌شود.

فرض کنید حجم همراه را به تعدادی سلول با حجم V تقسیم کنیم. هرکدام از این سلول‌ها می‌تواند جرم متفاوت و دلخواه M را داشته باشد که با تباین چگالی δ به چگالی زمینه به صورت زیر ارتباط دارد.

$$\frac{M}{V}=\bar{\rho}\,(1+\delta)$$

حال کمیت $N(m,z_1|M,V,z_0)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعداد میانگین هاله‌ها با جرم m که در انتقال به سرخ z_1 رسیده است و در سلول‌های به اندازه V قرار دارد که در انتقال به سرخ z_0، جرم M را دارند.

حال تباین چگالی عددی هاله‌ها را در سلول‌هایی به حجم V به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta_h(m,z_1|M,V,z_0)=\frac{N(m,z_1|M,V,z_0)}{n(m,z_1)\,V}-1$$

برای محاسبه تابع چگالی عددی هاله $n(m, z_1)$ را از فرایند پرس شکتر می‌دانیم.

حال صورت تعمیم آن است که جهت $N(m, z_1 | M, V, z_0)$ را محاسبه کنیم.

هاله‌ها نواحی فراچگالی هستند، که می‌توانند طی فرایند رشد اختلال‌ها رمبیده باشند. در نتیجه تعداد هاله‌ها در حجم V برابر خواهد بود با حجم اولیه V × چگالی نواحی که به اندازه کافی فراچگال باشند.

حجم همراه اولیه

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{M}{\bar{\rho}} = V(1+\delta)$$

$$N(m, z_1 | M, V, z_0) = n(m, z_1 | M, V, z_0)\, V(1+\delta)$$

طول همراه در زمان z_0

حجم همراه در زمان z_1

حال باید تابع n را محاسبه کنیم.

$V_1 = V(1+\delta)$

$V_1(z_1 > z_0) > V(z_0)$

$n(m, z_1)$ تعداد هاله در واحد حجم تابعی از تباین چگالی بحرانی در زمان z_1 است $(\delta_c(z_1))$

در این رهیافت $n(m, z)$ به معنی چگالی عددی هاله است که در حجم بسیار بزرگ به طوری که $(M \to \infty,\ \delta = 0$ باشد).

البته در نواحی چگال‌تر احتمال شکل‌گیری هاله بیشتر است در نتیجه برای محاسبه $n(m, z_1 | M, V, z_0)$ به جای $\delta_c(z)$ در رابطه محاسبه $n(m, z)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\delta_c(z_1) - \delta_0(\delta, z_0)$$

Mo, H. J. و White, S. D. M. 1996, MNRAS, 282, 347.

نکته بسیار مهم این است که در رابطه تعیین $n(m, z_1 | M, V, z_0)$ نمی‌توان از δ استفاده کرد.

زیرا $\delta_c(z_1)$ از بررسی‌های نظریه خطی به دست آمده در حالی که δ $\left(\frac{M}{\bar{\rho}} = V(1+\delta) \right)$

تباین چگالی واقعی است که برای $\delta_0(\delta, z)$ از نظریه غیرخطی ریزش کروی استفاده شده است.

$\delta_0(\delta, z_0)$ denotes the initial density, extrapolated, using linear theory, which a region must have had so as to have density δ at z_0.

در نتیجه چگالی عددی هاله با جرم m که در انتقال به سرخ z_1 دیده شده‌اند و در سلول‌هایی با حجم V و جرم M قرار دارند برابر است با

$$\frac{m^2 n(m, z_1 | M, V, z_0)}{\bar{\rho}} \frac{dm}{m} = \nu_{10} f(\nu_{10}) \frac{d\nu_{10}}{\nu_{10}}$$

که

$$\nu_{10} = \frac{\left[\delta_c(z_1) - \delta_0(\delta, z_0)\right]^2}{\sigma^2(m) - \sigma^2(M)}$$

نکته مهم: در مقاله

HALO MODEL OF LARGE SCALE STRUCTURE
Asantha Cooray and Ravi Sheth, astro-ph/0206508

$\nu = \frac{\delta_c^2}{\sigma^2}$ تعریف شده است، نمادگذاری معروف دیگر $\nu = \frac{\delta_c}{\sigma}$ است، در هر قسمت از این درسنامه در بخش مربوط ν را باز تعریف خواهیم کرد.

$f(\nu)$: تابع جهانشمول جرمی یا Universality function

Press - Schechter : $$\nu f(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\, \exp\left(-\frac{\nu}{2}\right)$$ توجه: $\delta_c^2/\sigma^2 = \nu$

Press, W. H. , Schechter P. , 1974, ApJ, 187, 425.

Sheth - Tormen $$\nu f(\nu) = A(p)\left(1 + (q\nu)^{-p}\right)\left(\frac{q\nu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{q\nu}{2}\right)$$

Sheth, R.K. & Tormen, G. 1999, MNRAS, 308, 119.

$p \approx 0.3$

$$A(p) = \left[1 + 2^{-p}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)\Big/\sqrt{\pi}\right]^{-1} \approx 0.322 \quad \text{and} \quad q \approx 0.75$$

if $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$ تابع جهانشمول شت - تورمن به تابع پرس شکتر تبدیل می‌شود.

حال به بررسی دو حد از رابطه $n(m, z_1 | M, V, z_0)$ می‌پردازیم.

اگر $V \to 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \delta \to \infty & \text{(تباین چگالی)} \\ \delta_0 \to \delta_c(z_0) \end{cases}$$
مستقل از جرم است.

از این رو $N(m, z_1 | M, V=0, z_0)$ تعداد میانگین زیرساختارهای به جرم m است که در زمان قبل‌تر $z_1 \geq z_0$ داشته است.

This limit of eq $$\frac{m^2\, n(m, z_1 | M, V \to 0, z_0)}{\bar{\rho}}\, \frac{dm}{m} = \nu_{10}\, f(\nu_{10})\, \frac{d\nu_{10}}{\nu_{10}}$$ gives what is called the progenitor mass function.

اگر $V \to \infty \Rightarrow$
$$\begin{cases} M \to \infty \\ |\delta| \to 0 \\ \sigma^2(M) \to 0 \end{cases}$$
در نتیجه عبارت فوق به حد $n(m, z_1)$ می‌رسد.

حال برای بررسی پارامتر بایاس فرض کنید که در حد حجم بزرگ (LARGE CELL LIMIT) هستید.

منظور از حد حجم بزرگ، حدی است که در آن واریانس اختلالات کوچکتر از واحد باشد.

در این صورت تباین چگالی $|\delta| \ll 1$ بوده و می‌توان از تقریب به دست آمده در بخش کروی (قبلاً محاسبه کرده‌ایم) استفاده کنیم (جمله اول همان رابطه معمول رشد ساختارها است $\delta \simeq a\,\delta_0$)

$$\frac{\delta_0}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^k = \delta - \frac{17}{21}\delta^2 + \frac{341}{567}\delta^3 - \frac{55805}{130977}\delta^4 + \dots$$

Bernardeau F., 1994, A & A, 291, 697.

در حجم‌های بزرگ جرم بزرگ وجود دارد و بدین ترتیب می‌توان از رابطه $\sigma(M) \ll \sigma(m)$ نیز استفاده کرد.

از این رو خواهیم داشت:

$$n(m, z_1 | M, V, z_0) \approx n(m, z_1) - \delta_0(\delta, z_0)\left(\frac{\partial n(m, z_1)}{\partial \delta_c}\right)\Bigg|_{\delta_c(z_1)} + \dots \quad (1)$$

حال با توجه به

$$N(m, z_1 | M, V, z_0) = n(m, z_1 | M, V, z_0)\, V(1+\delta) \quad (1)$$

فاکتور $1+\delta$ بسیار مهم است در بحث بایاس لاگرانژی و اویلری وارد خواهد شد (۲)

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) = \frac{N(m, z_1 | M, V, z_0)}{n(m, z_1)\, V} - 1 \quad (2)\ (3)$$

با جاگذاری رابطه ۲ در ۳ و استفاده از بسط تیلور ۱

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) = \frac{n(m, z_1 | M, V, z_0)\, \cancel{V}\,(1+\delta)}{n(m, z_1)\, \cancel{V}} - 1$$

$$\cong \frac{n(m, z_1)(1+\delta)\left[1 - \delta_0(\delta, z)\dfrac{\partial \ln n(m, z_1)}{\partial \delta_c}\right]}{n(m, z_1)} - 1$$

در نتیجه

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \cong \delta - (1+\delta)\,\delta_0(\delta, z)\left(\frac{\partial \ln n(m, z_1)}{\partial \delta_{sc}}\right)\Bigg|_{\delta_c(z_1)}$$

حال اگر به جای $n(m, z_1)$ از جواب پرس شختر یا شث تورمن استفاده کنیم

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \approx \delta\left(1 + \frac{\nu - 1}{\delta_c(z_1)} + \frac{1/\delta_c(z_1)}{1 + \nu^{1/2}}\right)$$

$$\approx b_1^{PS}(m, z_1)\,\delta$$

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \approx \delta\left(1 + \frac{q\nu - 1}{\delta_c(z_1)} + \frac{2p/\delta_c(z_1)}{1 + (q\nu)^p}\right)$$

$$\approx b_1^{ST}(m, z_1)\,\delta \qquad \nu = \frac{\delta_c^2(z_1)}{\sigma^2(m)}$$

کمیت داخل پرانتز همان پارامتر سوگیری است که بستگی به جرم و انتقال به سرخ دارد.

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \approx b_1(m, z_1)\, \delta$$

تباین چگالی هاله‌ها

تباین چگالی ماده

رابطه فوق نشان می‌دهد که تباین عددی هاله‌ها متناسب است با تباین ماده تاریک (جرم) ضریب تناسب که پارامتر بایاس است، بستگی به انتقال به سرخ و ویریال شدن جرم هاله دارد.

Cole, S. and Kaiser, N., 1989
Mo, H. J. and White, S. D. M. 1996, MNRAS, 282, 347.
Sheth, R. K. and Lemson, G. 1999, MNRAS, 304, 767
Sheth, R. K. and Tormen, G. 1999, MNRAS, 308, 119

در حالت پرس شکتر $\quad b_1^{ps} \approx 1 + \dfrac{\nu - 1}{\delta_c(z_1)}$

هاله‌های پرجرم‌تر از جرم مشخصه $m > m_*$ که $(\nu(m_*) - 1)$ $\leftarrow$ $\sigma(m) < \sigma(m_*)$

در نتیجه $\nu > 1$ و این بدین معنی است که هاله‌های پرجرم بایاس بیشتری نسبت به ماده تاریک دارند. درحالی که برای $m < m_*$ بایاس کمتر از واحد است.

b_1 برای هاله‌های پرجرم بسیار بزرگتر از واحد می‌تواند باشد ولی کوچکتر از $1 - \dfrac{1}{\delta_c(z_1)}$ نخواهد بود.

نکته بسیار مهم در این است که پارامتر $\nu = \dfrac{\delta_c}{\sigma(m)}$ بستگی به انتقال به سرخ دارد، این بستگی می‌تواند در δ_c باشد و یا $\sigma(m)$.

- اگر واریانس را در انتقال به سرخ صفر محاسبه کنیم $\sigma(M)$ مستقل از انتقال به سرخ است و بستگی به زمان پارامتر ν به δ_c داده می‌شود.

از رمبش کروی می‌دانیم که

$$* \quad \frac{\delta_c(z)}{1+z} = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3} \simeq 1.686$$

که در انتقال به سرخ $z=0$ ، $\delta_c \simeq 1.686$ می‌باشد.

- روش دوم این است که δ_c زمان صفر را در نظر بگیرید و $\sigma(m,z)$ را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\sigma_R^2(m,z) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \underbrace{W^2(kR)}_{\text{تابع پنجره با شعاع } R}\, \underbrace{P_L(k,z)}_{\text{طیف توان خطی ماده}}$$

طیف توان ماده با تابع رشد Growth function رابطه دارد.

$$P_L(k,z) = D^2(z)\, P_L(k, z=0)$$

در نتیجه:

$$\sigma_R(m,z) = D(z)\, \underbrace{\sigma_R(m)}_{\text{در انتقال به سرخ صفر}}$$

حال برای این که برابری این دو روش را در حد خطی ببینید:

$$\nu^{1/2}(z) = \frac{\delta_c(z=0)}{\sigma(m,z)} = \frac{\delta_c(z=0)}{\sigma(m)\,D(z)} \simeq \frac{\delta_c(z=0)(1+z)}{\sigma(m)} \overset{\text{طبق رابطه *}}{=} \frac{\delta_c(z)}{\sigma(m)} = \nu^{1/2}(z)$$

$$D(z) \propto \frac{1}{1+z} \propto a \quad \text{عامل مقیاس}$$

در ادامه بحث بایاس: نکته جالب است که برای ساختارهایی که در انتقال به سرخ صفر دریافت می‌شوند بایاس از 0.4 کمتر نخواهد شد.

$$b_1 > 1 - \frac{1}{1.68}$$

$\downarrow$

Press-Schechter,

از طرف دیگر هاله‌هایی که در انتقال به سرخ بسیار بالا دریافت شده باشند بایاس نزدیک به واحد دارند

$$1.68 = \delta_c(z=0) = \frac{\delta_c(z)}{1+z} \qquad z \to \text{بالا} \to \delta_c(z) \text{ بزرگ خواهد شد} \to \boxed{b \to 1}$$

$\downarrow$

چگالی بحرانی در زمان حال

Nusser, A. & Dekel, A. 1993, ApJ, 405, 437

نحوه دیگر بررسی بایاس

$$n(m|\delta) \simeq \left[1 + b_1(m)\,\delta\right] n(m)$$

$\downarrow$

چگالی عددی هاله‌ها به جرم

δ تباین چگالی با M $\equiv \dfrac{M}{V} \equiv \bar{\rho}(1+\delta)$

این بدین معناست که تباین چگالی δ معادله سلول‌بندی حجم با زیرحجم‌های به حجم V است!

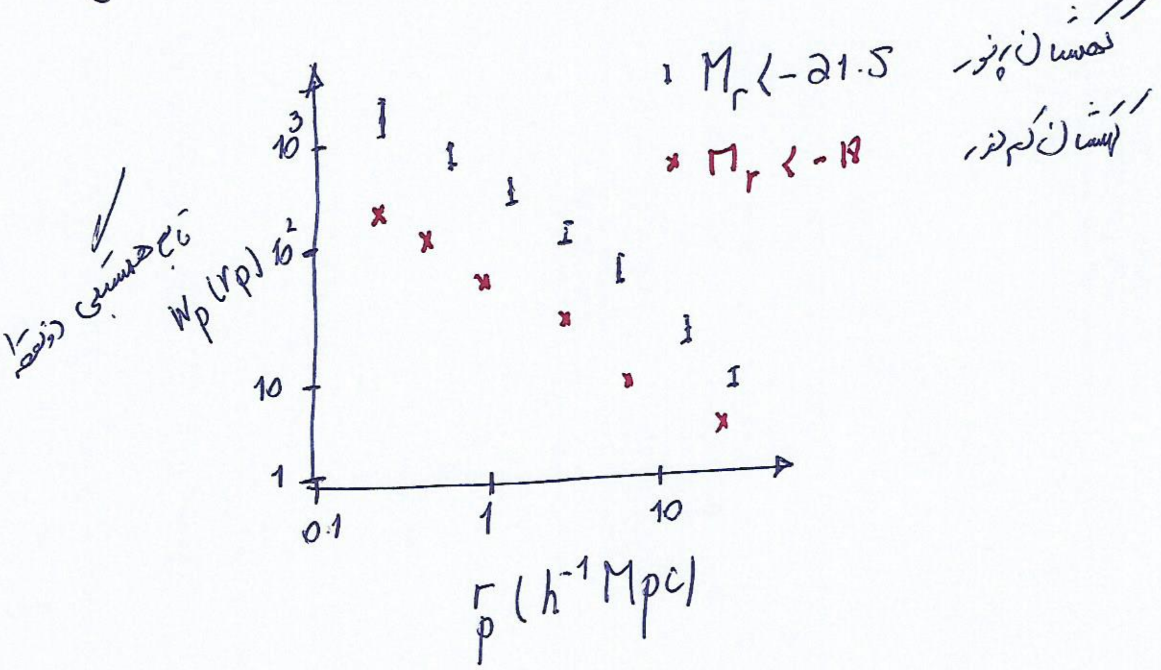
$$\rightarrow \underbrace{\frac{n(m|\delta)}{n(m)} - 1}_{\text{تعریف تباین چگالی هاله‌ها می‌باشد.}} = b_1(m)\,\delta$$

از آن جایی $b_1(m) \gg 1$ برای هاله‌های پرجرم است این بدین معنا است که هاله‌های پرجرم همبستگی بیشتری دارند.

نکته جالب بعدی این است که می‌توان تابع همبستگی کهکشان را محاسبه کرد و جالب این است که همبستگی کهکشان‌های پرجرم بیشتر است.

arXiv: 1505.07861

Hong Guo, Zheng Zheng, Idit Zehavi et al.



$$w_p(r_p) = 2\int_0^\infty \xi(r_p, r_\pi)\, dr_\pi$$

تابع همبستگی دو نقطه‌ای در 2D

تابع همبستگی دو نقطه‌ای در 3D

r_p : فاصله عمودی بین ۲ کهکشان

r_π : فاصله موازی بین ۲ کهکشان

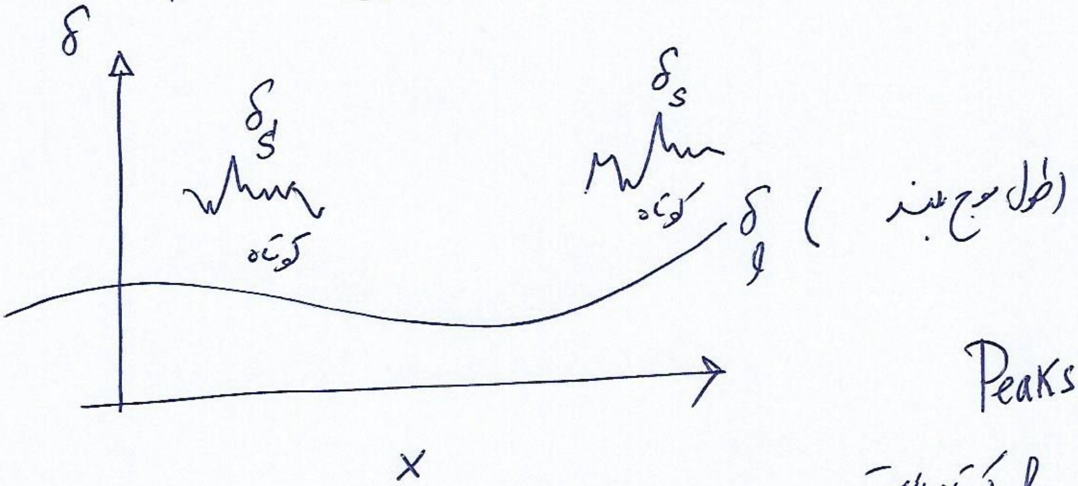
روش دیگر برای به دست آوردن بیان روشِ "Peak_Background Split" که نتیجه معادل روش قبل دارد.

حجم های به اندازه V معادل تابع چگالی δ کوچک است در نتیجه می توان تابع چگالی هر نقطه را به صورت زیر بسط داد.

$$\delta(\vec{x}) = \delta_s(\vec{x}) + \delta_l(\vec{x})$$

$\delta_s \geq 1$ طول موج کوتاه ← δ_s

$\delta_l \lesssim 1$ طول موج بلند ← δ_l



δ_s را قله گویند Peaks که دارای طول همبستگی l_s کوتاه است

δ_l را پس زمینه گویند Background که طول همراه همبستگی l_l بلند است. به طوری که

$$l_l \gg l_s$$

حال ناحیه ای را به طول l در نظر بگیرید به طوری که $l_s \ll l \ll l_l$ از آنجایی که طول مورد نظر بزرگتر از l_s می باشد تابع چگالی δ_l برای ناحیه مورد بحث ثابت است در حالی که δ_s چندین بار نوسان می کند. حال شرط

$$\delta > \delta_c \rightarrow \delta = \delta_s + \underbrace{\delta_l}_{\text{ثابت}} > \delta_c \equiv \nu\sigma \rightarrow \underbrace{\boxed{\delta_s > \nu\sigma - \delta_l \equiv \nu_{eff}\sigma}}_{\text{معادل } \delta_c \text{ نوین است.}}$$

به دلیل تغییر سطح تباین چگالی بحرانی، احتمال پیدا کردن ساختارهایی که حد بحرانی را رد می‌کنند بیشتر می‌شود.

$$P(>\nu, \vec{x}) = P_s\left(>\nu - \delta_l/\sigma\right)$$

احتمال تشکیل ساختارها $\delta > \delta_c$

احتمال ساختارها با تباین چگالی $\delta_s > \delta_c - \delta_l$

یا

$$= P(>\nu)\left[1 - \frac{d\ln P(>\nu)}{d\nu}\cdot\frac{\delta_l(\vec{x})}{\sigma}\right]$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که احتمال تشکیل ساختارها در شرایط $\delta_l > 0$ بیشتر از $\delta_l < 0$ است.

$$P(>\nu, \vec{x}) = P(>\nu)\left[1 + \delta_h(\vec{x})\right]$$

میزان افزایش احتمال ساختارها از حالت تکنواخت همگن

تباین چگالی هاله‌ها - نسبت تصادفی

در نتیجه

$$\delta_h(\vec{x}) = -\frac{d\ln P(>\nu)}{d\nu}\,\frac{\delta_l(x)}{\sigma} = b\,\delta_m$$

بایاس

در این جا فرض کرده‌ام که δ_l همان تباین چگالی ماده در گستره خطی است

$$b(z) \equiv -\frac{1}{\sigma}\frac{d\ln P}{d\nu}$$

Bardeen, J.M., Bond, J.R., Kaiser, N. & Szalay, A.S.
1986, Astrophys. J. 304, 15

حال به روش Peak-Background Splitting می‌توان بایاس خطی را برای تابع توزیع پرس شکتر محاسبه کرد.

Kaiser, N. 1984, Astrophys. J. Lett., 284, L9

Cole, S. & Kaiser, N. 1989, Mon. Not. R. Astron. Soc. 237, 1127

فرض کنید تابع توزیع ساختارهای پس زمینه Press-Scheshter باشد

(در اینجا فرض می‌کنیم $\nu \equiv \frac{\delta_c}{\sigma}$)

فراوانی ساختارها

$$\bar{n}(m) = -2\,\frac{\bar{\rho}}{m^2}\,\underbrace{\frac{\nu e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}_{f^{PS}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\nu e^{-\nu^2/2}}\,\frac{d\ln\sigma}{d\ln m}$$

"m جرم هاله"

تابع چندگانگی جرمی پرس شکتر

حال تابع احتمال متناسب است با تابع جرم هاله‌ها در نتیجه در نواحی‌ای که [illegible] δ_l وجود داشته باشد تابع ارتفاع ν موثر $\nu_{eff} = \nu - \frac{\delta_l(x)}{\sigma(m)}$ خواهد بود.

در نتیجه

$$n(m,\vec{x}) = \bar{n}(m) - \frac{\partial \bar{n}}{\partial \nu}\,\frac{\delta_l(x)}{\sigma(m)}$$

حال تابع تباین چگالی عددی هاله را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\delta_h(\vec{x}) \equiv \frac{n(m,\vec{x}) - \bar{n}(m)}{\bar{n}(m)} = -\frac{\partial \ln \bar{n}}{\partial \nu}\cdot\frac{\delta_l(\vec{x})}{\sigma(m)}$$

و با توجه به تعریف بایاس

$$\delta_h(x,z) = b(m,z)\,\delta_{l=m}(x,z)$$

در نتیجه:

$$b(m,z) \equiv \frac{\delta_h(\vec{x})}{\delta_m(\vec{x})} = -\frac{1}{\sigma_R}\frac{\partial \ln \bar{n}}{\partial \nu} = -\frac{1}{\sigma_R}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu}\right)$$

بایاس به دست آمده معادل نتیجه ی ... است

$$\rightarrow \boxed{b(m,z) = \frac{\nu^2(z)-1}{\delta_c}}$$

Mo & White (1996)

البته 1 کمتر است.

این به خاطر نوع بایاس محاسبه شده است. بایاس در روش Peak-Background معادل بایاس لاگرانژی است

(Lagrangian Bias) b_L و بایاس روش قبل اویلری است b_E

(Eulerian Bias) . می‌توان نشان داد که

$$b_E \simeq b_L + 1$$

* تاکنون در مورد سوگیری توزیع ماده در کیهان و هاله های ماده تاریک بحث کردیم. سوگیری دیگری از جنس بایاس کهکشان - هاله نیز وجود دارد که در اصل

$$\delta_g = b_g(L_*, z, M)\,\delta_h$$

تباین چگالی عدد کهکشان ها

می‌تواند تابعی از جرم هاله میزبان، درخشندگی کهکشان و انتقال به سرخ باشد. بدست آوردن این سوگیری بستگی به جمعیت پذیری هاله ها HALO OCCUPATION DISTRIBUTION (HOD) دارد، که مورد بحث درسنامه دیگری است.

* سوگیری را می‌توان از تحلیل تابع همبستگی نیز استخراج کرد.

* تحول سوگیری، بستگی به مقیاس، اثر ناگوسیت اولیه موضوع بحث دیگری است.