مکانیک تحلیلی II - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹

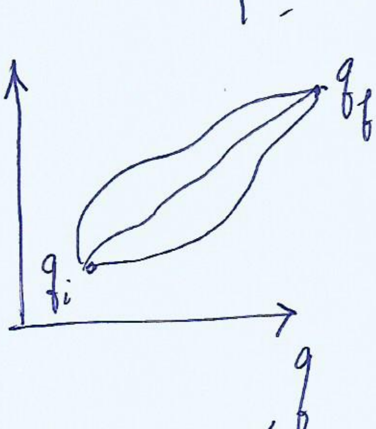
معادله همیلتون-ژاکوبی "The Hamilton-Jacobi Equation"

معادله همیلتون-ژاکوبی قسمت های متفاوت بحث مکانیک همیلتونی را به یکدیگر وصل می کند. کنش را به صورت زیر تعریف کرده بودیم

$$S = \int_0^T L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \tag{1}$$

که کنش را برای تمام مسیرها مطابق شکل زیر تعریف می کنیم

(2)



$$\begin{cases} q_i(0) = q_i^{initial} \\ q_i(T) = q_i^{final} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$ درجات آزادی

اصل همیلتون $\delta S = 0$، مسیر درست را مشخص می کند.

حال فرض کنید که کنش بر روی مسیر درست $q_i^{classical}(t)$ تعریف شود.

$$W(q_i^{initial}, q_i^{final}, T) = S[q_i^{classical}(t)] \tag{3}$$

اگرچه S یک functional است ولی W تابعی است از q اولیه و نهایی و بازه زمانی T. حال می توان این سوال را پرسید که اگر $q_i^{initial}$ را ثابت نگه داریم و q_i^{final} را تغییر دهیم تغییرات به چه طریق خواهد بود.

برای جواب به این سؤال، به ابتدای داستان و اصل وردش مراجعه می کنیم.

(4)
$$\delta S = \int_0^T dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right]_0^T$$

که ترم دوم در حالتی که δq_i در ۰، T صفر بودند، قابل صرف نظر بود.

ولی هم اکنون، چون مسیر صحیح، مسیر کلاسیکی است $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$

از این رو خواهیم داشت.

(5)
$$\frac{\partial W}{\partial q_i^{final}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{t=T} = P_i^{final}$$

کمیت دیگری که می توان محاسبه کرد $\frac{\partial W}{\partial T}$ است. حال مسیر کلاسیکی را در نظر می گیریم که شرایط اولیه $q_i^{initial}$ ثابت است و زمان کمی طولانی تر است. $T \to T + \delta T$

در نتیجه

(6)
$$\frac{dW}{dT} = \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial W}{\partial q_i^{final}} \dot{q}_i^{final} = \frac{\partial W}{\partial T} + P_i^{final} \dot{q}_i^{final}$$

اما این مشتق کامل قابل مقایسه است زیرا

(7)
$$\frac{dW}{dT} = L\left(q_i^{classical}(T), \dot{q}_i^{classical}(T), T \right) = L\left(q_i^{final}, \dot{q}_i^{final}, T \right)$$

با ترکیب دو رابطه (6) ، (7) خواهیم داشت.

$$(8)\qquad \frac{\partial W}{\partial T} = -\left(p_i^{final}\, \dot{q}_i^{final} - L(q_i^{final}, \dot{q}_i^{final}, T)\right)$$

$$= -H(q_i^{final}, p_i^{final}, T)$$

در رابطه جدید زمان T و مکان q_i^{final} است. در نتیجه می‌توان به سادگی label ها را عوض کرد

$$\begin{cases} T \to t \\ q_i^{final} \to q_i \end{cases}$$

در نتیجه که تابع وابسته به زمان در فضای پیکربندی

configuration space خواهیم داشت که $W = W(q_i, t)$

$$(9)\qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \qquad \& \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -H(q_i, p_i, t)$$

و یا به بیان دیگر

$$(10)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}, t\right)$$

معادله بالا معادله همیلتون ژاکوبی است.

Hamilton-Jacobi Equation!

به نظر می‌رسد که $q_i^{initial}$ را می‌توان به عنوان یک ثابت انتگرال در نظر گرفت

حال رابطه (9-الف) را با معادله اول همیلتون ترکیب می‌کنیم

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\Bigg|_{p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}} \tag{11}$$

در سمت راست تمام مولفه‌های مومنتوم با فضای پیکربندی توصیف شده است. حال با n - معادله دیفرانسیل مرتبه اول سرو کار خواهیم داشت که تحول q_i را مشخص می‌کنند.

با این توصیف W مسیر کلاسیک را مشخص می‌کند. از یک نقطه شروع می‌کنیم، W نقش یک تابع موج کلاسیک را ایفا می‌کند که حقیقی نیز هست. تنها باید نشان دهیم که معادله دوم همیلتون قابل دسترس است. $\left(\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i\right)$ در نتیجه

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial q_i} \tag{12}$$

حال با توجه به معادله همیلتون ژاکوبی خواهیم داشت $\partial W/\partial t = -H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}, t\right)$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{q}_j\,\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \tag{13}$$

حال رابطه (13) را در ترم دوم رابطه (12) جایگذاری می‌کنیم

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\,\dot{q}_j + \left(-\partial H/\partial q_i\right) - \dot{q}_j\,\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \tag{14}$$

درنتیجه رابطه (14) برابر است با

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (15)$$

چگونگی این معادلات را دسته‌بندی کنیم

a) معادلات لاگرانژی — Configuration space (فضای پیکربندی) — n معادله درجه ۲، 2n شرط اولیه

(جدول 1)

b) معادلات هامیلتونی / معادلات همیلتون — Phase space (فضای فاز) — ۲ دسته معادله درجه ۱ n تایی، 2n شرط اولیه

c) معادله هامیلتون ژاکوبی (Hamilton-Jacobi) — Configuration space — n معادله درجه ۱، n ثابت حرکت

□ درصورتی که هامیلتونی تابع صریحی از زمان نباشد $\frac{\partial H}{\partial t}=0$، جواب خاص ساده‌ای به شکل زیر وجود دارد.

$$W(q_i, t) = W^{0}(q_i) - Et \qquad (16)$$

E ـ ثابت است. در این صورت هامیلتونی به شکل زیر است.

$$H\left(q_i, \frac{\partial W^{0}}{\partial q_i}\right) = E \qquad (17)$$

6,

W^0 را Hamilton's Principal function می‌گویند.

تصور حرکت ذره در فضای پیکربندی، مفهوم W^0 موضوع جالبی برای بررسی است.

□ زاویه کنش از همیلتون ژاکوبی "Action and Angles from Hamilton-Jacobi"

معادلات همیلتون ـ ژاکوبی شاید کمک بزرگی برای حل مسئله نکند ولی نگاه عمیقی به مکانیک کلاسیک می‌اندازد. به عنوان مثال فرض ذره در یک بعد را بررسی می‌کنیم

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(q) \tag{18}$$

از آنجایی که همیلتونی تابع صریحی از زمان نیست، انرژی کمیت پایسته‌ای است، از این رو یک ثابت حرکت می‌تواند β باشد که تابعی از انرژی است. $\beta = \beta(E)$ در نتیجه

$$W = W(q, t; \beta) \tag{19}$$

حال فرض کنید که تبدیل کانونی داشته باشیم از مختصه

$$(q, p) \rightarrow (\alpha, \beta) \tag{20}$$

سؤال این است که مختصه جدید چه چیست؟

از آنجایی که می‌دانیم که تبدیل صحیح تبدیل کانونی است. Canonical Transformation

در نتیجه باید بتوانیم

$$\{q, p\}_{(\alpha, \beta)} \equiv \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial q}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 1 \tag{21}$$

حال با توجه به بستگی توابع و روابط بین W

$$(22)\quad \begin{cases} W = W(q,\beta) \\ q = q(\alpha,\beta) \\ p = p(\alpha,\beta) \end{cases}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$(23)\quad \{q,p\}_{(\alpha,\beta)} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial q} + \cancel{\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial \beta}}\right) - \cancel{\frac{\partial q}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial q}{\partial \alpha}} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)$$

حال اگر مختصه α را $\alpha \equiv \dfrac{\partial W}{\partial \beta}$ انتخاب کنیم تبدیل کانونی خواهد شد.

در نتیجه تقارن بسیار جالبی با حل $W(q,t;\beta)$ همیلتون-ژاکوبی داریم.

$$(24)\quad P = \frac{\partial W}{\partial q}\ ,\quad \alpha = \frac{\partial W}{\partial \beta}$$

α → coordinate, β → cte of motion

توجه بسیار مهم:

generating function

$$(25)\quad F = F_2(q,P,t) - Q_i P_i \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ ;\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$(q,p) \longrightarrow (\alpha \equiv Q,\ \beta \equiv P)$$

پس W نمونه‌ای از تابع مولد نوع دوم است.

به طور مثال فرض کنید $\beta = E$ در نتیجه تکانه تعمیم یافته جدید یا انرژی است. سؤال این است که مختصه مرتبط کدام است اگر

$$W(q,t;E) = W_0(q,E) - Et$$ باشد

مختصه دوگان عبارت خواهد بود از:

$$\alpha \equiv \frac{\partial W_0}{\partial E}(q,E) - t \qquad (26)$$

که به معنا $-t_0$ را دارد. در نتیجه حرکت را می‌توانیم بر اساس انرژی و زمان شروع فرمولبندی کنیم

E و t_0 هر دو ثابت هستند و در مسیر ذره تغییر نمی‌کنند.

مثال دوم: اگر $\beta = I$ در نظر بگیریم. سؤال این است که مختصه α چیست؟

$$W_0 = \underbrace{\int L\,dt}_{\text{classical action}} + Et = \int \underbrace{(L+H)}_{L+\dot{q}p-L}\,dt = \int \dot{q}p\,dt = \int p\,dq \qquad (27)$$

حال برای α داریم

$$\alpha \equiv \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{d}{dI}\int p\,dq - \underbrace{\frac{dE}{dI}}_{\omega}\,t = \theta - \omega t \qquad (28)$$

Note: $t = \frac{d}{dE}\int p\,dq$

$$\theta = \omega t = \omega \frac{d}{dE}\int p\,dq = \frac{dE}{dI}\cdot\frac{d}{dE}\int p\,dq = \frac{d}{dI}\int p\,dq$$

درنتیجه

(29) $$\alpha = \theta - \omega t$$

از آن رو α دقیقاً θ نسبت به یک چارچوب انتقال یافته به اندازه ωt دارد. به بیان دیگر α با زمان تغییر نمی‌کند. درنتیجه

W can be thought of as a way to generate new, time independent, canonical variables!

Hand, Finch / Louis N. Hand & Janet D. Finch

Goldstein /

مکانیک کوانتوم

یکی از دلایلی که بحث‌های مجرد مکانیک هستند، ارتباط آن با نظریه کوانتوم است.

جدول 2

مکانیک کلاسیک

(q_i, p_i) موقعیت ذره

کوانتوم

$\psi(q)$ configuration space.

$$\hat{q}_i \, \psi(q) = q_i \, \psi(q)$$

اپراتور

اپراتور $$\hat{p}_i \, \psi(q) = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \psi$$

$\{\ ,\ \}$ classical

$-\frac{i}{\hbar} [\ ,\ ]$ quantum

به روش فوق Canonical Quantisation گویند.

معادله حرکت به ترتیب زیر است.

$$\dot{f} = \{ f, H \} \rightarrow i\hbar \dot{\hat{f}} = [\hat{f}, \hat{H}] \qquad (30)$$

equation of motion, Heisenberg picture

در تصویر هایزنبرگ بستگی به زمان به اپراتورها داده می‌شود و نه به حالت ها.

استدلال Paul Dirac بر پایه براکت ها!

Question: Hamilton, Jacobi, Scrödinger, Feyman!

⟶ ... – father of leibniz

Carl Gustav Jacob
Jacobi (1804 – 1851)
University of Berlin.
Konigsberg
↓
Paul Gordon
↓
Emmy Noether
Uni – Erlangen
Gottingen

Friedrich Hasenöhrl
(1874 – 1915)
↑
Schrodinger
(1887 – 1961)
University Vienna
Nobel (1933)

Karl Herzfeld
(1892 – 1978)
Vienna
John-Hopkins
↓
John Archibald Wheeler
(1911 – 2008)
Princeton Univ.

Wheeler 8 Jacob Bekenstein,
Hugh Everett, Richard Feymann.
Bahram Mashhoon, Charles Misner, Kip Thorne. Unruh, Wald

Kip Thorne (Nobel prize - 2017)

↓

William Press

Ethan Vishniac

David Spergel

Niayesh Afshordi

Robert Brandenberger

Adam Riess

(Nobel Prize 2011)