مکانیک تحلیلی ۲ - مباحث ویژه در مکانیک همیلتونی

در فیزیک بارها با این سئوال مواجه بوده ام که انتخاب دستگاه مختصات چگونه حل مسئله را می تواند ساده تر کند. در مکانیک همیلتونی تبدیلات بین q و p ها تبدیلات بیشتری وجود دارد. آیا انتخاب دستگاه مناسب در فضای فاز حل مسئله را ساده خواهد کرد.

بیایید با یک مثال ساده این را حل کنیم

□ نوسانگر هارمونیک ساده

برای نوسانگر ساده همیلتونی زیر را داریم.

$$(1) \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

که q و p مختصه و تکانه تعمیم یافته است و ω فرکانس طبیعی نوسانات است.

معادلات همیلتونی به صورت زیر خواهد بود

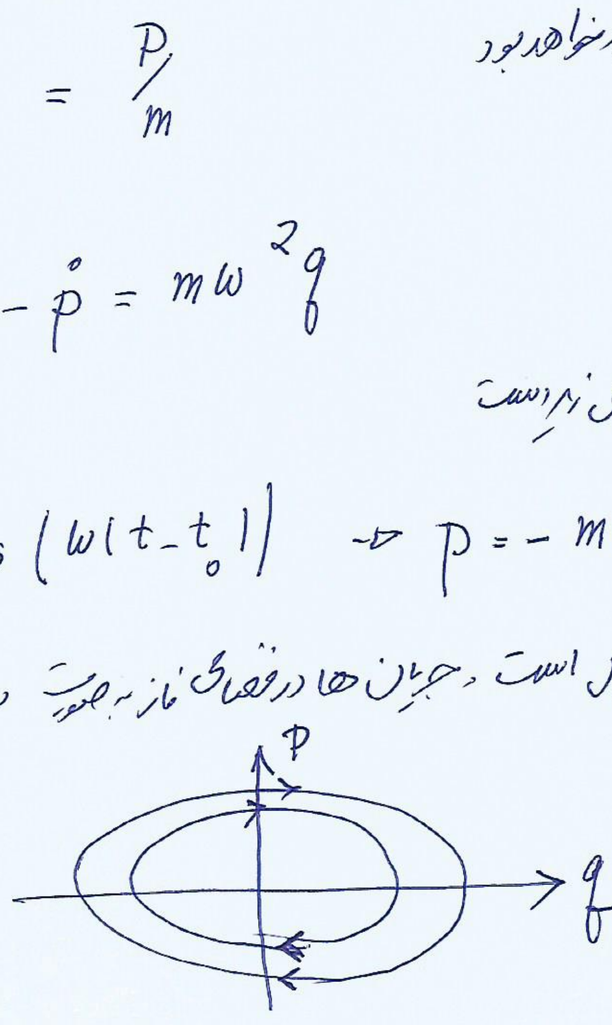
$$(2) \text{ "الف" } \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$(2) \text{ "ب" } \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = m\omega^2 q$$

که راه جواب آن به شکل زیر است

$$(3) \qquad q = A \cos(\omega(t-t_0)) \rightarrow p = -m A \omega \sin(\omega(t-t_0))$$

A و t_0 ثابت انتگرال است و جریان ها در فضای فاز به صورت بیضی گون است



(شکل ۱)

حال فرض کنید که تغییر مختصات به شکل زیر داشته باشیم

(4) $$(q, p) \rightarrow (\theta, I)$$

که θ زاویه (مختصه جدید) و I کنش مربوط است. تبدیل بین این دو مختصه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(5) $$q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin\theta \; ; \; p = \sqrt{2Im\omega}\cos\theta$$

تبدیلات در نگاه اول غیر بدیهی است. البته باید ابتدا نشان دهیم که این تبدیل کانونیک است.

برای نشان دادن این اتفاق می‌توان پواسون براکت $\{q, p\}$ را نسبت به (θ, I) را محاسبه کنیم

(6) $$\{q, p\}_{(\theta, I)} = \frac{\partial q}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}\, 2m\omega\right)\frac{1}{\sqrt{2Im\omega}}\cos\theta$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{m\omega}\cdot\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\right)\sin\theta\left(\sqrt{2Im\omega}\right)\sin\theta$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \{q, p\}_{(\theta, I)} = 1$$

روش دوم نشان دادن کانونیک بودن تبدیل با استفاده از تبدیل ژاکوبی است.

در این روش باید نشان دهیم که ژاکوبی تبدیل J ، symplectic است.

$$(7)\qquad J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\theta}{\partial q} & \dfrac{\partial\theta}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{\partial I}{\partial q} & \dfrac{\partial I}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m\omega}{p}\cos^2\theta & -\dfrac{m\omega q}{p^2}\cos^2\theta \\[2ex] m\omega q & p/m\omega \end{pmatrix}$$

برای محاسبه ماتریس ژاکوبی J از روابط زیر استفاده کرده ایم.

$$(8)\qquad \begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2I}{m\omega}}\sin\theta \\[2ex] p = \sqrt{2Im\omega}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{p^2}{m^2\omega^2} + q^2 = \frac{2Im\omega}{m^2\omega^2}\cos^2\theta + \frac{2I}{m\omega}\sin^2\theta = \frac{2I}{m\omega}$$

$$\rightarrow (9)\qquad I = \frac{m\omega}{2}\left[\frac{p^2}{m^2\omega^2} + q^2\right]$$

$$(10)\qquad tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{q/\sqrt{2I/m\omega}}{p/\sqrt{2Im\omega}} = m\omega\, q/p$$

نتیجه
$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = m\omega/p\, dq \quad , \quad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{m\omega q}{p^2}\, dp$$

(11) $$J \bar{J} J^{T} = \bar{J}$$ حال باید نشان دهیم که رابطه زیر برقرار است

که $\bar{J}$ ماتریس symplectic - تبدیل است

(12)
$$= \begin{pmatrix} \frac{m\omega}{p}\cos^2\theta & -\frac{m\omega q}{p^2}\cos^2\theta \\ m\omega q & \frac{p}{m\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m\omega}{p}\cos^2\theta & m\omega q \\ -\frac{m\omega q\cos^2\theta}{p^2} & \frac{p}{m\omega} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m\omega}{p}\cos^2\theta & -\frac{m\omega q}{p^2}\cos^2\theta \\ m\omega q & p/m\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{m\omega q\cos^2\theta}{p^2} & p/m\omega \\ -\frac{m\omega}{p}\cos^2\theta & -m\omega q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{m^2\omega^2 q\cos^4\theta}{p^3} + \frac{m^2\omega^2 q\cos^4\theta}{p^3} & \cos^2\theta + \frac{m^2\omega^2 q^2}{p^2}\cos^2\theta \\ -\frac{m^2\omega^2 q^2\cos^2\theta}{p^2} - \cos^2\theta & pq - pq \end{pmatrix}$$

Note
$$q^2/p^2 = \frac{\frac{2I}{m\omega}\sin^2\theta}{2Im\omega\cos^2\theta} = \frac{1}{m^2\omega^2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \rightarrow q^2/p^2\, m^2\omega^2\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

(13)
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
در نتیجه تبدیل انتخاب شده کانونیک است.

در نتیجه تبدیل فوق کانونیک است حال به همیلتونی در مختصه جدید نگاه خواهیم کرد.

$$(14)\quad \begin{cases} H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega^2 q^2 \\[2mm] q = \sqrt{\dfrac{2I}{m\omega}}\, \sin\theta \\[2mm] p = \sqrt{2Im\omega}\, \cos\theta \end{cases} \Rightarrow H = \frac{1}{2m}(2Im\omega)\cos^2\theta + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{2I}{m\omega}\sin^2\theta$$

$$= I\omega\cos^2\theta + I\omega\sin^2\theta$$

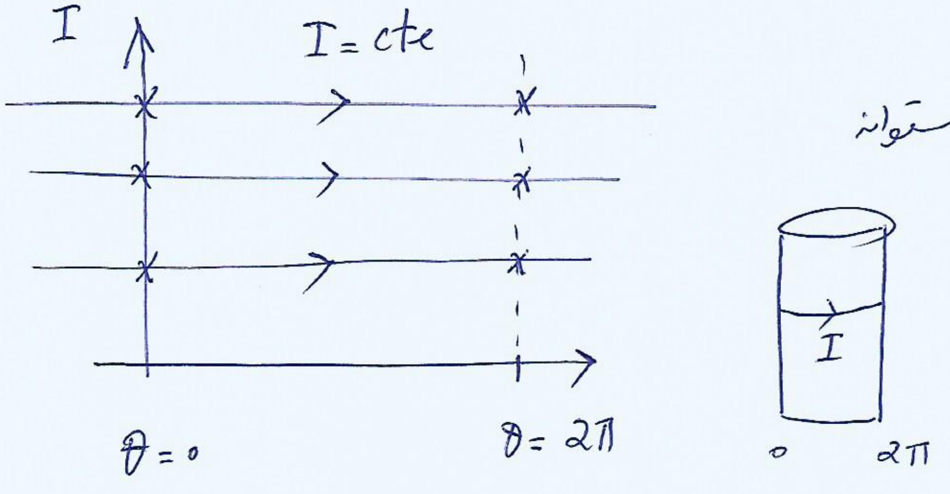
$$(15)\qquad H = \omega I$$

در نتیجه همیلتونی تابعی از θ نیست. در نتیجه این مختصه چرخه‌ای است. در مختصه جدید معادلات همیلتون به صورت زیر خواهد بود:

$$(16)\qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \quad ; \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

و فضای فاز به صورت زیر خواهد بود.

(شکل ۲)



مثال حل شده نمونه‌ای از مدل های action‑angle variable است.

برای سیستم های دینامیکی که انتگرال پذیرند integrable هستند، می توان به روش فوق فضای فاز را بررسی کرد.

منظور از انتگرال پذیری این است که تبدیل کانونی به صورت $(q_i, p_i) \to (\theta_i, I_i)$ پیدا کنیم که هامیلتونی تابعی از θ_i ها نباشد، به بیان دیگر بتوان هامیلتونی را به صورت زیر نوشت.

$$H = H(I_1, I_2, \dots, I_n) \qquad (17)$$

سیستم با n-درجه آزادی

معادله هامیلتون نشان می دهد که n کمیت پایسته I_i داریم. از طرف دیگر

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i \qquad (18)$$

ω_i ها مستقل از θ_i هستند ولی می توانند تابعی از I_i ها باشند. در نتیجه $\theta_i = \omega_i t$. اگر چنین تبدیلی وجود داشته باشد، به این سیستم زاویه-کنش action-angle گویند که بتوانیم حرکت را مقید در نظر گرفت و در راستای مولفه θ به $0 < \theta_i < 2\pi$ هنجار کرد.

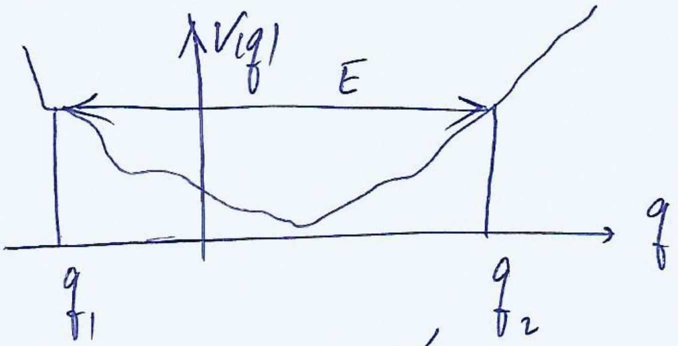
قضیه لیوویل بدین ترتیب است اگر n-ثابت $I_1, I_2, \dots, I_n$ پیدا کنیم که جفت جفت جابه‌جاپذیر باشند $\{I_i, I_j\} = 0$ در این صورت متغیر زاویه-کنش وجود خواهد داشت و سیستم انتگرال پذیر است.

□ کمیت (متغیر) زاویه کنش در یک سیستم 1D

همچنین 1 بعدی را در نظر بگیرید که حرکت سیستم طبق شکل ۳ مقید باشد.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{19}$$

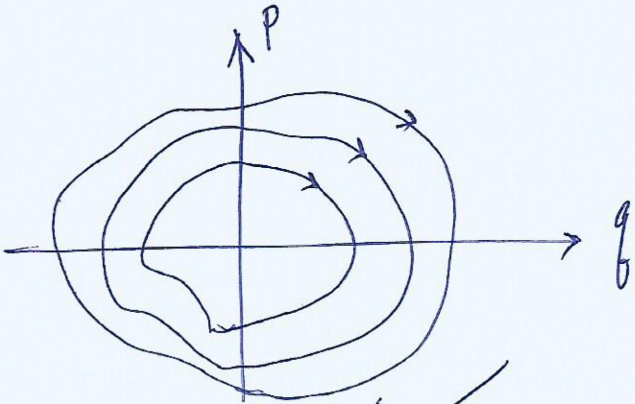
(شکل ۳)



$q_1 < q < q_2$

از آنجایی که $H=E=cte$ است. سیستم انتگرال‌پذیر است و در فضای فاز شکل زیر را دارد.

(شکل ۴)



هدف این است که تبدیل کانونی را پیدا کنیم که در فضای فاز نمودار دایره‌ای شود. سؤال این است که I , θ را چگونه پیدا کنیم.

$$H = H(I) = E \tag{20}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial E}{\partial I} = \omega$$ frequency of the orbit

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

حدس به صورت زیر است.

$$\text{ansatz} \quad (21) \qquad I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq$$

ناحیه فضای فاز است که در مدار بسته محاسبه شده است. این ناحیه به $\frac{1}{2\pi}$ بهنجار شده است.

اثبات: ابتدا تکانه را برحسب ثابت انتگرال E به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(22) \qquad p = \sqrt{2m} \cdot (E - V(q))^{1/2} \qquad p = m\dot{q}$$

در نتیجه

$$(23) \qquad dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

انتگرال حرکت برای یک مدار کامل دوره تناوب را خواهد داد که $T = \frac{2\pi}{\omega}$ در نتیجه

$$(24) \qquad \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

$$= \oint \sqrt{2m} \left(\frac{d}{dE} \sqrt{E - V(q)} \right) dq$$

مشتق نسبت به انرژی را می‌توان نشان داد که می‌توان از انتگرال خارج کرد.

$$(25) \qquad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{d}{dE} \oint \sqrt{2m} \sqrt{E - V(q)} \, dq$$

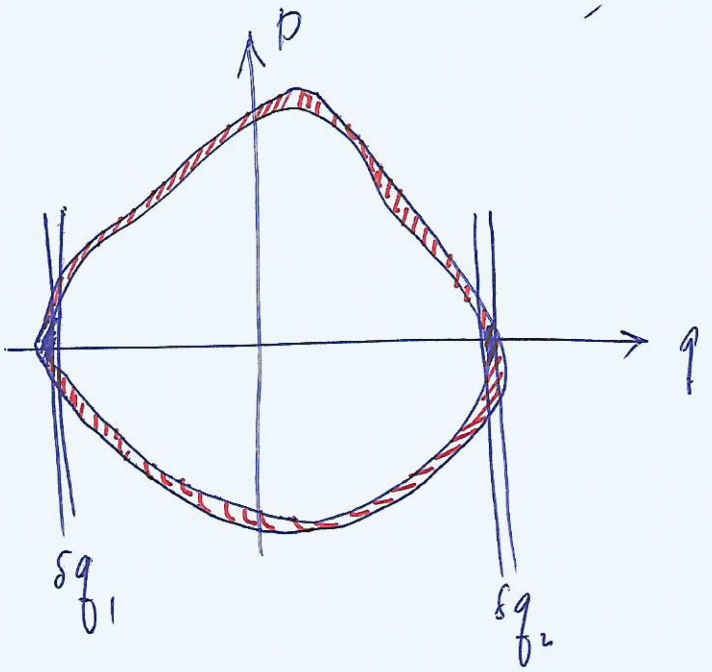
$$= d/dE \oint p \, dq = 2\pi \frac{dI}{dE}$$

9 /

$$\frac{dE}{dI} = \omega \tag{26}$$

نتیجه جالب توجه این است که

که ω فرکانس مدار است. تنها نکته باقی مانده این است که نشان دهیم $\frac{d}{dE}$ را می‌توانستیم از انتگرال خارج کنیم به شکل ۵ توجه کنید.



$$\int_{q_i+\delta q_i}^{q_i} \underbrace{\sqrt{2m}\sqrt{E-V(q)}\,dq}_{\text{[illegible]}} \approx \sqrt{2m}\sqrt{E-V(q)}\,\frac{\partial V}{\partial q}\,\delta E \tag{27}$$

انتگرال در [illegible] ابتدا

[illegible]

نکته مهم. در نقطه انتهایی $E=V(q)$ است.

برای اینکه کمیت θ را پیدا کنیم

$$t = \frac{d}{dE}\int p\,dq \tag{28}$$

همچنین می‌خواهیم $\theta = \omega t$ در نتیجه

$$\theta = \omega \frac{d}{dE}\int p\,dq \tag{29}$$

از طرف دیگر چون $\omega \equiv dE/dI$ است.

$$\theta = \omega \frac{d}{dE} \int p\,dq = \frac{dE}{dI} \frac{d}{dE} \int p\,dq \tag{30}$$

$$\theta = \frac{d}{dI} \int p\,dq \tag{31}$$

برای تورهای بالاتر

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_j p_j\,dq_j \tag{32}$$

$$\theta_i = \partial/\partial I_i \int_{\gamma_i} \sum_j p_j\,dq_j$$

γ_i periods of invariant toris.

Ref: David Tong - Classical Dynamics.

University of Cambridge.

Action - Angle Variable برای مسئله کپلر

برای بررسی سیستم انتگرال پذیر با بخشی از یک پارامتر مسئله کپلر است. که تحت پتانسیل زیر حرکت کند

$$V(r) = -\frac{k}{r} \tag{33}$$

با توجه به پایستگی جهت اندازه حرکت زاویه ای در مختصه قطبی مسئله را حل می کنیم. مختصه (r, ϕ)

$$P_r = m\dot{r} \quad , \quad P_\phi = mr^2\dot{\phi} \tag{34}$$

تکانه های مختصه r , ϕ

همیلتونی به صورت زیر است

$$H = \frac{1}{2m}P_r^2 + \frac{1}{2mr^2}P_\phi^2 - \frac{k}{r} \tag{35}$$

حال دو کمیت کنش (action) داریم مربوط به هر کدام از مولفه های r , θ

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{P_\phi}_{\sim cte} \, d\phi = P_\phi \tag{36}$$

برای محاسبه کنش مربوط به مختصه "r" از پایستگی انرژی، تکانه زاویه ای I_ϕ استفاده می کنیم

$$H = E = \frac{1}{2m}P_r^2 + \frac{1}{2mr^2}I_\phi^2 - \frac{k}{r} \tag{37}$$

$$2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{I_\phi^2}{r^2} = P_r^2$$

12,

در نتیجه I_r به صورت زیر خواهد بود.

(38)

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint P_r\, dr = \frac{1}{2\pi}\, 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} P_r\, dr = \frac{1}{2\pi}\, 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m\left(E+\frac{k}{r}\right)-\frac{I_\phi^2}{r^2}}\, dr$$

با توجه به مدار بیضوی که دوره تناوب به صورت ۲ برابر

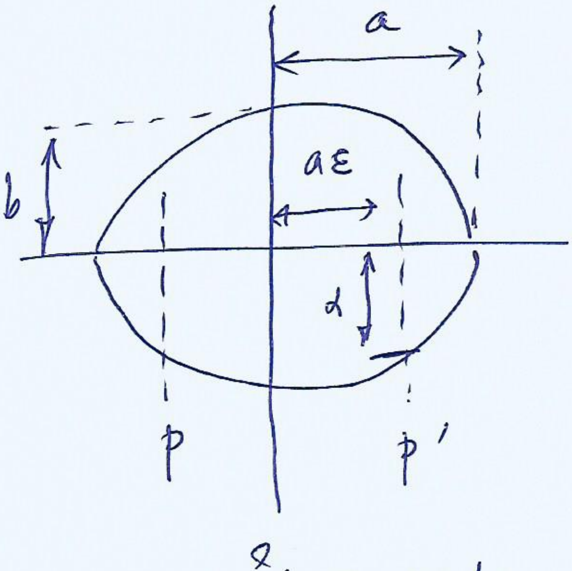
فاصله اوج، حضیض مشخص می‌شود.

یادآوری: با استفاده از روابط نیروی مرکزی

39,

$$\begin{cases} r_{min} = a(1-\varepsilon) = \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon} \\[2ex] r_{max} = a(1+\varepsilon) = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \equiv \dfrac{I_\phi^2}{\mu k} \\[2ex] \varepsilon \equiv \sqrt{1+\dfrac{2E I_\phi^2}{\mu k^2}} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mu \equiv m \\ k = K \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \alpha/r = 1+\varepsilon\cos\theta \\[1ex] a = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \dfrac{k}{2|E|} \\[2ex] b = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \dfrac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \end{cases}$$



با توجه به روابط فوق می‌توان نشان داد

(40)

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr\sqrt{\left(1-\frac{r_{min}}{r}\right)\left(\frac{r_{max}}{r}-1\right)} = \frac{\pi}{2}\left(r_{min}+r_{max}\right) - \pi\sqrt{r_{min}\, r_{max}}$$

در نتیجه

$$I_r = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, K - I_\phi \qquad (41)$$

سپس با بازآرایی رابطه فوق خواهیم داشت

$$E = -\frac{mk^2}{2(I_r + I_\phi)^2} \qquad (42)$$

نکته جالب این است که انرژی به هم تبهگنی است و حال می‌توان سرعت زاویه‌ای تغییرات متغیر ها را بدست آورد.

$$\dot{\theta}_r = \frac{\partial H}{\partial I_r} \qquad \dot{\theta}_\phi = \frac{\partial H}{\partial I_\phi} \qquad (43)$$

که $\phi = \theta_\phi$ ولی θ_r تابع پیچیده‌ای از r است! البته شکل متقارن ظهور I_r , I_ϕ در انرژی نشان آن است که دوره تناوب در جهت θ_ϕ و θ_r یکسان است یعنی با یک دوره تناوب در زاویه به مکان قبلی برمی‌گردیم. این نشان مدارهای بسته است.