مباحث ویژه در مکانیک همیلتونی III

تبدیلات کانونیک، به ما کمک می‌کنند که با تبدیل مختصه مناسب به (q,p) جدیدی برسیم که درآن همیلتونی دارای مختصه چرخه‌ای باشد و جواب مسئله با توجه به ثابت‌های حرکت به راحتی استخراج شود. تبدیل کانونیک دیگری می‌تواند وجود داشته باشد که (q,p) را به (q_0,p_0) که شرایط دینامیکی اولیه سیستم است ببرد.

$$q = q(q_0, p_0, t)$$

(1)

$$p = p(q_0, p_0, t)$$

این تبدیل کانونی، در شرایط کلی‌تری که همیلتونی تابع از زمان باشد نیز استفاده می‌شود.

□ معادله همیلتون - ژاکوبی "Hamilton-Jacobi equation"

اگر تبدیل کانونیک مناسبی را انتخاب کنیم که همیلتونی در مختصه جدید K برابر صفر باشد خواهیم داشت

(2) $$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial K}{\partial Q} = \dot{P}_i = 0$$

کمیت K با استفاده از تابع مولد generating function به صورت زیر مرتبط است

(3) $$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$ F تابع مولد

اگر $K = 0$ باشد تابع مولد باید در رابطه زیر صدق کند.

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

F را تابعی از مختصه قدیمی q_i ، ثابت تکانه P_i در مختصه جدید، و زمان تعریف می‌شود.

$$F = F_2(q, P, t) \qquad (5)$$

تابع مولد نوع 2

همچنین نشان داده‌ایم که $P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ در نتیجه همیلتونی (4) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$H\left(q_1, \dots, q_n ; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n} ; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

رابطه بالا را معادله همیلتون-ژاکوبی می‌گویند! معادله دیفرانسیل با $(n+1)$ متغیر $(q_1, \dots, q_n : t)$ برای تابع مولد است.

در ادبیات مکانیک کلاسیک به جای F_2 از نماد S استفاده می‌شود که به آن تابع اصلی همیلتون Hamilton's Principle function گفته می‌شود.

حل رابطه (6) جواب را برحسب مختصه $\{q\}$ داده می‌شود. تکانه جدید P_i را می‌دانیم که ثابت است. فرض کنید جواب مسئله به صورت زیر است.

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \dots, q_n ; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} ; t) \qquad (7)$$

که $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ ثوابت انتگرال‌اند.

به راه حل های فوق راه حل کامل معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ است.

یکی از ثوابت حرکت در معادله حرکت تاثیر ندارد زیرا مشتق جزئی تابع مولد در معادله (6) ظاهر می‌شود.

در نتیجه

$$S = S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) \tag{8}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ثوابت حرکت جدیدند، آن‌ها را تکانه ثابت قرار می‌دهیم $P_i = \alpha_i$

از طرف دیگر داشتیم

$$p_i = \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i} \tag{9}$$

حال برای درک مفهوم S، مشتق کامل زمانی آن را در نظر می‌گیریم.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= P_i \dot{q}_i - H = L \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial \alpha} \dot{\alpha}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} = P_i \dot{q}_i - H \end{aligned} \right. \tag{10}$$

در نتیجه S که "Hamilton's Principle function" از انتگرال نامشخص لاگرانژی فقط یک ثابت تفاوت دارد.

$$S = \int L\, dt + cte \tag{11}$$

اگر هامیلتونی به طور صریح به زمان وابسته نباشد آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$S(q,\alpha,t) = \underbrace{W(q,\alpha)}_{\text{Hamilton characteristic function}} - at \;\rightarrow\; \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{12}$$

4/

نوسانگر هارمونیک مثالی از روش هامیلتون ـ ژاکوبی

برای درک روش کار هامیلتون ژاکوبی مثال نوسانگر هارمونیک ساده را حل می‌کنیم. همیلتونی نوسانگر

12/ $$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2 w^2 q^2\right) \equiv E$$

$$U = \frac{1}{2} k q^2 \quad ; \quad w = \sqrt{k/m} \Rightarrow U = \frac{1}{2} m w^2 q^2 = \frac{1}{2m}\left(m^2 w^2 q^2\right)$$

k ثابت فنر است. برای استفاده از معادله همیلتون ژاکوبی به جای p ، $\partial S/\partial q$ را جایگذاری می‌کنیم

13/ $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2 w^2 q^2\right] + \partial S/\partial t = 0$$

حال از تابع مشخصه همیلتون استفاده می‌کنیم

14/ $$\begin{cases} dW/dt = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha t \\ p_i = \dfrac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i} \end{cases} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = p_i \dot{q}_i$$

انتگرال گیری

15/ $$W = \int p_i \dot{q}_i \, dt = \int p_i \, dq_i$$

generating functions.

$$P_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \qquad 16$$

اگر انتخاب را داشته باشیم

$$F = F_1 (q, Q, t)$$

$$P_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \qquad 17$$

$$= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

از آنجایی که q_i ، Q_i مستقل در نتیجه ضرایب $\dot{q}_i$ ، $\dot{Q}$ باید برابر باشند

$$\begin{cases} P_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases} \Rightarrow K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad 18$$

تابع مولد دوم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$19 \qquad F = F_2 (q, P, t) - Q_I P_i$$

در نتیجه با جایگذاری در رابطه 16

$$20 \qquad P_i \dot{q}_i - H = \cancel{P_i \dot{Q}_i} - K + \frac{dF_2}{dt} - \cancel{\dot{Q}_i P_i} - Q_i \dot{P}_i$$

$$= - Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_2 (q, P, t)$$

6,

21, $$P_i \dot{q}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_2}{\partial P}\dot{P}$$

نتیجه

22, $$\begin{cases} P_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\[2ex] Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_t} \end{cases}$$

و $$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Generating Function	Derivatives	Special Case
$F = F_1(q, Q, t)$	$P_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}$; $P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i$ $Q_i = P_i \quad P_i = -q_i$
$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$P_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q}$ $\quad Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i$ $Q_i = q_i \quad P_i = P_i$
$F = F_3(p, Q, t) + q_i P_i$	$q_i = -\partial F_3 / \partial P_t$ $\quad P_i = -\partial F_3 / \partial Q_i$	$F_3 = p_i Q_i$ $Q_i = -q_i$ $P_t = -p_i$
$F = F_4(p, P, t) + q_i P_i - Q_i P_i$	$\begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i = \partial F_4 / \partial P_i \end{cases}$	$F_4 = P_i P_i$ $Q = P_i \quad P_t = -q_i$