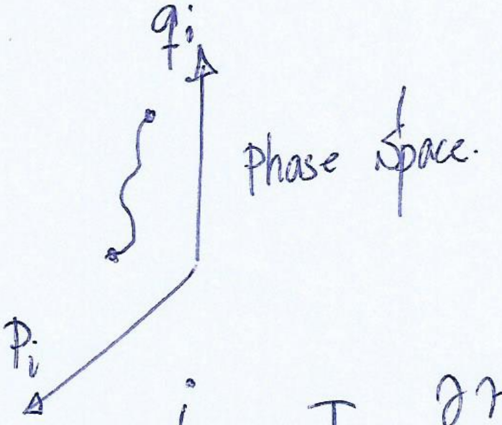
مباحث ویژه در مکانیک همیلتونی

برای بررسی دینامیک یک ذره در فضای فاز می‌توان از دو دسته معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ همیلتون استفاده کرد.



$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

معادله همیلتون را می‌توان به شکل $\dot{\xi}_\alpha = J_{\alpha\beta} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_\beta}$ به صورت symplectic نوشت. که ξ_α مجموع q_i و p_i ها می‌باشد

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix} \qquad \xi_\alpha = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{n تا ۱} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{2n تا n+1} \end{array}$$

$$\dot{\xi}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi_j}$$

که $J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$

□ قضیه لیوویل Liouville's theorem

اگر یک نقطه مشخص (q_i, p_i) را در فضای فاز در نظر بگیریم و حجم حول نقطه به صورت زیر باشد.

$$v = dq_1 \cdots dq_n \, dp_1 \cdots dp_n$$

نکته مهم در مورد قضیه لیوویل این است که اگر سیستم دارای تحول دینامیکی همیلتونی داشته باشد حجم فضای فاز تغییری نمی‌کند.

۲) این بدین معنی است که شکل (مورفولوژی) دیفرانسیل حجم تحت تحول تغییر می‌کند ولی حجم ثابت است.

تغییر در فضای فاز در مکانیک همیلتونی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} q_i \longrightarrow q_i + \dot{q}_i\,dt = \underbrace{q_i + \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\,dt}_{\text{تحول همیلتونی}} \equiv \underbrace{\tilde{q}_i}_{\text{نقطه جدید در فضای فاز}} \\[2em] p_i \rightarrow p_i + \dot{p}_i\,dt = \underbrace{p_i - \dfrac{\partial H}{\partial q_i}\,dt}_{\text{معادله همیلتونی}} \equiv \underbrace{\tilde{p}_i}_{\text{نقطه جدید}} \end{cases}$$

حال حجم جدید را در فضای فاز بدست می‌آوریم.

$$d\tilde{v} = d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n\, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n$$

$$= \left(\det J\right) dv$$

J ژاکوبی ماتریس تبدیل است که تانسور $2n \times 2n$ به صورت زیر است.

$$J = \begin{pmatrix} \left.\partial\tilde{q}_i/\partial q_j\right|_{n\times n} & \left.\partial\tilde{q}_i/\partial p_j\right|_{n\times n} \\ \left.\partial\tilde{p}_i/\partial q_j\right|_{n\times n} & \left.\partial\tilde{p}_i/\partial p_j\right|_{n\times n} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$\det J = \frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_j}\,\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial p_j} - \frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial q_j}$$

برای این که قضیه لیوویل را نشان دهیم باید $\det J = 1$ را نشان دهیم.

$$\begin{cases} \tilde{q} = q + \dfrac{\partial H}{\partial p} dt \\ \tilde{p} = p - \dfrac{\partial H}{\partial q} dt \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} dt & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2} dt \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2} dt & 1 - \dfrac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dt \end{pmatrix}$$

$$\det J = 1 + O(dt^2) \rightarrow \frac{d}{dt} |\det J| = 0$$

اگر ماتریس را به صورت $1 + \underbrace{\epsilon}_{\text{کمیت کوچک}} M$ بنویسیم

$\epsilon \ll 1$

$$\det(1 + \epsilon M) = 1 + \epsilon \, \mathrm{Tr}(M) + O(\epsilon^2)$$

$\mathrm{Tr}(M) = 0$

$$\det J = 1 + \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) dt + O(dt^2) \cong 1 + O(dt^2)$$

پس تبدیل مختصات از (q, p) به (Q, P) حجم فضای فاز ثابت باقی می‌ماند.

با اثبات قضیه لیوویل اکنون به بررسی توزیع ذرات در فضای فاز می‌پردازیم.

حال فرض کنید که انسامبلی (ensemble) از سیستم‌ها داشته باشیم که با یک تابع چگالی $\rho(q,p,t)$ توضیح داده شود.

اگر در سیستم فقط یک ذره داشته باشد تابع چگالی در رابطه روبرو صادق می‌کند.

$$\int \rho(q,p,t) \prod_i dp_i \, dq_i = 1$$

حال اگر N ذره مشابه بدون برهم‌کنش داشته باشیم مثلاً اتمهای گاز، با 10^{23} مولکول رابطه هنجار فوق به صورت روبرو نوشته می‌شود

$$\int \rho(q,p;t) \prod_i dp_i \, dq_i = N$$

قبل از استفاده از قضیه لیوویل مشتق کامل تابع چگالی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

حال با استفاده از معادلات همیلتون داریم

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

سیستم که ذرات تولید یا نابود نمی‌شود

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\{\rho, H\}$$

حال از آنجایی که طبق قضیه لیوویل حجم فضای فاز ثابت است و ذراتی تولید یا فنا نمی‌شود

حال سیستم‌های فیزیکی را بررسی می‌کنیم که همیلتونی تابع صریحی از زمان نباشد

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

در این صورت $\rho = \rho(H(q,p))$ که در این چگالی فضای فاز در معادله زیر صدق می کند

$$\frac{\partial\rho}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial\rho}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

که در این صورت چگالی فضای فاز دارای جوابی به صورت تابع بولتزمان است که در معادله فوق صدق می کند

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{H(q,p)}{KT}\right) \quad \text{Boltzman distribution}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial H} = -\frac{\rho}{kT} \quad , \quad H = \frac{p^2}{2m} \text{ هیسلتونی ذره آزاد } \rightarrow \rho = \rho_0 e^{\frac{-m\dot{r}^2}{2kT}}$$

توزیع گاوسی برای سرعت‌ها به صورت فوق نتیجه تابع توزیع بولتزمان است

⚠ تمرین ۱: درباره قضیه Bohr-van Leeuwen theorem تحقیق ! صفحه انجام دهید.

⚠ تمرین ۲: روابط زیر را برای پواسون براکت‌ها اثبات کنید.

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$$

که α, β ثابتند، f، g و h توابعی از مختصات اختیار یافته (q,p)

⚠ تمرین ۳: رابطه Leibniz را بدست آورید

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}$$

⚠ تمرین ۴: نشان دهید برای مولفه‌ها اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$$

تبدیل کانونی و شکل Symplectic همیلتونی

تبدیل کانونی از مختصات فضای فاز ξ به Ξ

$$\Xi_a = \Xi_a(\xi)$$

$$\dot{\Xi}_a = \frac{\partial \Xi_a}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j \underset{\downarrow}{=} \frac{\partial \Xi_a}{\partial \xi_j} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} \qquad (1)$$

با استفاده از معادله همیلتون به شکل Symplectic

از طرف دیگر ماتریس تبدیل از ξ به Ξ به صورت روبرو تعریف کنیم

$$M_{aj} \equiv \frac{\partial \Xi_a}{\partial \xi_j}$$

حال اگر تبدیلات کانونی باشد درخواست کنیم که معادلات حرکت به صورت زیر پایسته بماند

$$\dot{\Xi}_a = J_{ab}\frac{\partial H}{\partial \Xi_b} = J_{ab}\frac{\partial \xi_k}{\partial \Xi_b}\frac{\partial H}{\partial \xi_k} \qquad (2)$$

حال رابطه (۱) , (۲) RHS :

$$\frac{\partial \Xi_a}{\partial \xi_j} J_{jk}\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = J_{ab}\frac{\partial \xi_k}{\partial \Xi_b}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}$$

جایگذاری ماتریس تبدیل

$$\to \quad M_{aj} J_{jk}\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = J_{ab} M^{-1}_{kb}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$MJ = J(M^t)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{MJM^t = J}$$

ماتریس M که در رابطه $MM^t = 1$ صدق می کند Orthonormal می باشد.

ماتریس M که در رابطه $J = MJM^t$ صدق می کند را Symplectic می گویند که عضو گروه $M \in Sp(2n)$ می باشد.

حال ویژگی خاص ماتریس M این امکان را ایجاد می کند که به واسطه آن براکت ها تحت تبدیل کانونی پایسته است.

$$\{A, B\}_{\xi} = J_{ij} \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial \xi_j} = J_{ij} \frac{\partial A}{\partial \eta_a} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta_a}{\partial \xi_i}}_{M_{ai}} \frac{\partial B}{\partial \eta_b} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta_b}{\partial \xi_j}}_{M^t_{jb}}$$

ماتریس تبدیل

$$= \left(M_{ai} J_{ij} M^t_{jb}\right) \frac{\partial A}{\partial \eta_a} \frac{\partial B}{\partial \eta_b}$$

$$= J_{ab} \frac{\partial A}{\partial \eta_a} \cdot \frac{\partial B}{\partial \eta_b} = \{A, B\}_{\eta}$$

طبق رابطه قبل

درنتیجه تبدیل کانونی به شکل Symplectic ، $\{\ \}$ را پایسته نگه می دارد.

در مورد تبدیلات، تقارن ها و کمیت های پایسته کار کنید!

One of the Pillars of theoretical Physics.