

تمرین سری چهارم نسبت خاص

مهلت تحویل: 29 آبان

1- سفینه فضایی با سرعت متغیر  $u(\tau)$  از دید ناظر ساکن در حرکت مستقیم الخط است. شتابی که ناظر درون سفینه اندازه گیری می کند برابر  $f(\tau)$  است که  $\tau$  زمان ویژه ناظر سفینه است. اگر در زمان  $\tau = 0$  سرعت سفینه از دید ناظر ساکن برابر  $u_0$  باشد:

الف) نشان دهید:

$$c \tanh \psi(\tau) = \frac{u(\tau) - u_0}{1 - \frac{u(\tau)u_0}{c^2}}$$

که

$$\psi(\tau) = \frac{1}{c} \int_0^\tau f(\tau') d\tau'$$

همینطور ثابت کنید سرعت سفینه هیچگاه به سرعت نور نمی رسد.

ب) اگر سفینه پایگاه خود را در  $t = \tau = 0$  ترک گوید و با ویژه شتاب ثابت  $f$  روی خط مستقیم حرکت کند، نشان دهید هیچ سیگنال نوری که بعد از زمان  $t = c/f$  از پایگاه ارسال می شود نمی تواند به سفینه برسد. (قرمز گرایی نور از دید سفینه را حساب کنید).

روی نمودار فضا زمانی نیز این موضوع را نشان دهید.

2- برای دو چهاربردار زمان گونه  $V_1$  و  $V_2$  که *Isochronous* هستند (یعنی یا هر دو به گذشته اشاره دارند یا هر دو به آینده) نشان دهید:

$$V_1 \cdot V_2 = v_1 v_2 \cosh \phi_{12}$$

که  $\phi_{12}$  زاویه هذلولوی بین دو بردار و برابر با *rapidity* نسبی دو ذره ای است که جهان خط آنها موازی  $V_1$  و  $V_2$  باشد.

همینطور ثابت کنید  $\phi$  خاصیت جمعی دارد یعنی  $\phi_{13} = \phi_{12} + \phi_{23}$

3- معادله چهاربرداری  $\frac{dA}{d\tau} = \phi U$  که  $A$  چهاربردار شتاب و  $U$  چهاربردار سرعت و  $\phi$  یک اسکالر است را در نظر بگیرید. نشان

دهید این معادله بیان می کند:  $\alpha = c\sqrt{\phi}$

همینطور نشان دهید معادله بالا هم ارز معادله روبروست:  $\frac{d(\gamma^3 \vec{a})}{dt} = 0$