

نسبیت خاص - پاییز ۱۳۹۹ - میان ترم

۲۷- فرض کنید دو ذره A و B در دستگاه S' هر دو با سرعت ثابت \bar{v} در جهت x' حرکت می کنند. در نتیجه معادله جهان خط آن ها با رابطه زیر داده می شود:

$$x'_A(t_A) = \bar{v}t'_A + x'_A(0)$$

$$x'_B(t_B) = \bar{v}t'_B + x'_B(0)$$

فاصله دو ذره در دستگاه S' همواره در زمان یکسان $t'_A = t'_B$ سنجیده می شود. در نتیجه فاصله دو ذره در دستگاه S' به صورت روبرو داد می شود. $\Delta x' = x'_A(0) - x'_B(0)$.

الف) حال با استفاده از تبدیلات لورنتس نشان دهید که فاصله دو ذره در دستگاه S که نسبت به دستگاه S' با سرعت β در جهت x (پیکربندی استاندارد- standard configuration) حرکت می کند به صورت زیر است:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma(1 + \beta\bar{v})}$$

که γ فاکتور لورنتس است.

ب) حال فرض کنید که حجم سه بعد فضایی را به صورت روبرو در دستگاه S تعریف کنیم $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ که اندیس های ۱، ۲ و ۳ نشان دهنده مختصات فضایی هستند. نشان دهید که حجم فضا به صورت زیر تحت تبدیلات لورنتس داده می شود:

$$d^3x' = \frac{p^0}{p'^0} d^3x$$

که p^0 و p'^0 مولفه صفرم ۴- تکانه ذرات است.

راهنمایی: برای به دست آوردن رابطه فوق ارتباطی را باید بین مولفه صفرم ۴- تکانه در دو دستگاه S و S' باید به دست آورید.

راهنمایی: توجه داشته باشید که $\bar{v} = p'_x/p'_0$ می باشد که p'_x مولفه تکانه فضایی در جهت x' می باشد.

۲۸ - در این سوال قصد داریم قدم به قدم ناوردایی کمیتی را به دست آوریم که فیزیک تابش جسم سیاه را در دو دستگاه لخت به دست دهد:

الف) با توجه به تعریف ۴-تکانه به صورت، $p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$ که m_0 جرم سکون ذره، x^μ چاربردار مکان و $d\tau$ دیفرانسیل طول فضا- زمانی است. مولفه صفرم، ۴-تکانه را بر حسب جرم

سکون ذره و تکانه قسمت فضایی به دست آورید. در فیزیک نظری، معمول است که به ذراتی که در معادله حرکت $p^\mu p_\mu = const$ حرکت می کنند On Shell گویند. منظور از Shell پوسته ای با جرم ثابت است. نشان دهید که این لایه ها مربوط به مکان هندسی جرم ثابت در فضای انرژی و تکانه فضایی ذره است.

(ب) دستگاه S و S' دو دستگاه لخت هستند که با سرعت ثابت $\beta = \frac{v}{c}$ نسبت به یکدیگر در جهت محور z حرکت می کنند. ارتباط بین چهار بردار تکانه را در دستگاه S و S' به دست آورید.

(ج) در این قسمت سوال رابطه تبدیل بین حجم تکانه فضایی در دستگاه S ($d^3p = dp_1 dp_2 dp_3$) که dp_i دیفرانسیل تکانه خطی در جهت \hat{i} است) را با حجم تکانه فضایی در دستگاه S' ($d^3p' = dp'_1 dp'_2 dp'_3$) که dp'_i دیفرانسیل تکانه خطی در جهت \hat{i} در دستگاه جدید است) را به دست آورید و نشان دهید که رابطه تبدیل برابر است با:

$$d^3p' = \frac{p^{0'}}{p^0} d^3p$$

راهنمایی ۱: برای این تبدیل می توانید از دترمینان ماتریس ژاکوبی استفاده کرد.
 راهنمایی ۲: باید توجه داشته باشید که مولفه صفرم تکانه تابعی از مولفه قسمت فضایی می باشد.
 راهنمایی ۳: شکل کلی ماتریس تبدیل خیز با جهت دلخواه $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ به صورت زیر است.

$$\Lambda_{bosst} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

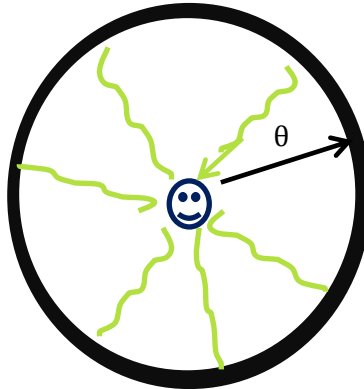
(د) با استفاده از نتیجه به دست آمده از سوال قبل که

$$d^3x' = \frac{p^0}{p'^0} d^3x$$

نشان دهید که حجم فضای فاز $d^3x d^3p$ یک کمیت لورنتس ناوردا است. در ادامه استدلال کنید که چگالی فضای فاز که برابر است با تعداد ذرات در فضای فاز کمیت لورنتس ناوردا می باشد. شرط لازم برای ناوردایی

$$f = \frac{\text{number}}{d^3x d^3p} \quad \text{چیست؟}$$

۲۹- فرض کنید شما در مرکز یک کره ای قرار گرفته باشید. که سطح کره تابش یکنواخت جسم سیاهی با دمای T داشته باشید. فوتون های حاصل از این پوسته از هر جهت مطابق شکل زیر به سمت شما می آید.



حال فرض کنید که شما تصمیم می گیرید که با سرعت $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ به یک جهت از این کره که سطح آن تابش با دمای ثابت دارد حرکت کنید.

الف) ابتدا با انتخاب دستگاه مختصات مناسب به طوری که دستگاه ساکن مرتبط با کره و شما را در پیکربندی استاندارد قرار دهد نشان دهید که فوتون های که از روبرو به شما می رسند به خاطر اثر داپلر فرکانس بیشتری نسبت به فوتون های که از پشت به شما می رسند، دارند.

این نتیجه را می توانید به صورت دقیق تر با رابطه زیر نشان دهید:

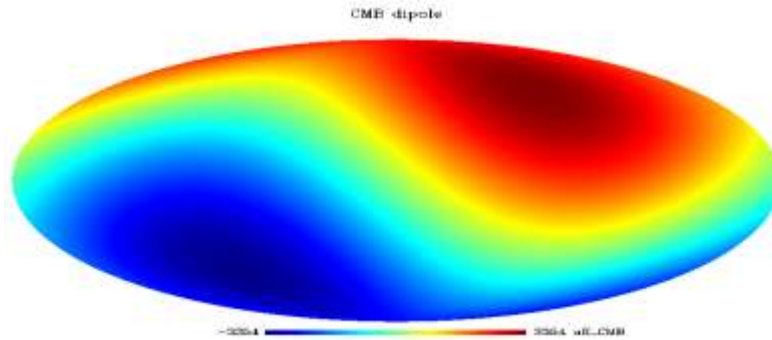
$$v_{int} = \gamma(1 - \beta \cos\theta)v_{obs}$$

که v_{obs} فرکانس مشاهده شده و v_{int} فرکانس ذاتی فوتون های گسیل شده از سطح کره می باشد. θ زاویه ای است که جهت فوتون ورودی با سرعت شما درست می کند. آیا می توانید علامت منفی و حضور $\cos\theta$ را در رابطه فوق توجیه کنید.

۳۰- سوال های ۲۷-۲۸-۲۹ را که حل کرده اید، به شما کمک خواهند کرد که مسئله واقعی را حل کنید. کره ای که سطح آن تابش جسم سیاه انجام می دهد، متناظر تابش زمینه کیهان است. تابشی که از فوتون های کیهان اولیه به ما می رسد. از آن جایی که ما (گروه محلی کهکشان ها) با سرعت

$v = 369.0 \pm 0.9 \text{ km/s}$, به سمت تابش زمینه حرکت می کنند اثر دو قطبی دمایی را به اندازه

$T \simeq 3.355 \pm 0.008 \text{ mK}$ بر روی تابش زمینه مشاهده می کند. الگوی این دو قطبی دمایی در نقشه مسطح از این کره به شکل زیر است:



طیف تابش جسم سیاه تابش پس زمینه کیهان ، طیف جسم سیاه است که شدت ویژه آن به شکل زیر داده می شود:

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

که I_ν شدت ویژه specific intensity می باشد که برابر با میزان انرژی دریافتی در بازه فرکانسی $(\nu, \nu + d\nu)$ در زاویه فضایی $d\Omega$ که از سطح نرمال به جهت رسیدن فوتون ها dA_\perp و در زمان dt به ما می رسد. h ثابت پلانک، T دمای جسم سیاه تابش زمینه کیهان و k_B ثابت بولتزمان است.

الف) با توجه به تعریف شدت ویژه و این نتیجه مهم که در سوال های قبل به دست آوردید که حجم فضای فاز $d^3x d^3p$ ناورد است. نشان دهید که کمیت زیر لورنتس ناورد است.

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \text{Lorentz Invariant}$$

ب) در ادامه با این فرض که گروه محلی یک ناظر لخت و تابش زمینه کیهان ناظر لخت دیگری است. نشان دهید که شدت ویژه تابش زمینه کیهان برای ما به صورت زیر به دست می آید. که این شدت سازگار با تابش جسم سیاه با یک دمای جدید است:

$$I'_\nu(T) = \frac{2h\nu'^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu'}{k_B T'}} - 1}$$

که پرآیم نشان دهنده کمیت های مشاهده شده در دستگاه ناظر لخت مربوط به ما می باشد. ج) نشان دهید که دمای جدید به صورت زیر تعریف می شود:

$$T'(\hat{n}') \simeq \frac{T(\hat{n}')}{\gamma(1 - \beta \cos\theta')}$$

به نظر می رسد که تابش زمینه کیهان راهنمایی است برای تعریف تبدیلات لورنتس برای مفهوم ترمودینامیکی دما

د) آیا جز اثر داپلر اثر دیگرنسبیت خاصی وجود دارد که تابش زمینه کیهان را دچار اختلال کند؟