به نام خدا
نسبیت خاص
تمرین سری هفتم
موعد تحویل : دوشنبه ۱۳ دی ۱۳۹۵

---

۱ قضیه نوتر و مثال های مهم

قضیه نوتر قضیه ای پر کاربرد در فیزیک است، که نمای کلی آن به صورت زیر است :

تقارن در سیستم فیزیکی ← جریان پایسته ($\partial_\mu J^\mu = 0$) ← بار پایسته ($\frac{dQ}{dt} = 0$)

ابتدا به اثبات این قضیه در تفسیر میدانی می پردازیم:
میدان ϕ^A را که درآن، $A = 0, ..., N$ شمارشگر مولفه های میدان می باشد(مثلا در نظریه ی الکترو مغناطیس $N = 3$) در نظر بگیرید. تقارن روی سیستم فیزیکیمان یعنی تحت تبدیلی مشخص، معادلات توصیف کننده ی میدان عوض نشود، که در زبان لاگرانژی یعنی کنش سیستم ناوردا بماند:
تحت تبدیل $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$ (توجه کنید که در اینجا x تغییر نمیکند، چون میتوانیم همواره به جای آن مقدار $\phi(x)$ را تغییر بدهیم. همچنین در این قسمت لاگرانژی تابعی صریح از x نیست- برای خودتان تحقیق کنید که چه زمانی مکان-زمان به صورت صریح وارد لاگرانژی میشوند!-) داریم:

$$\delta A = \int d^4x \; \delta L(\phi^A, \partial_\mu \phi^A) \; = 0 \tag{۱}$$

آ) با توجه به انتگرال بالا استدلال کنید که $\delta L = \partial_\mu K^\mu$ که اگر میدان K^μ در حد بینهایت به صفر میل کند.
راهنمایی: قضیه ی دیورژانس در ۴ بعد:

$$\int_V d^4x \; \partial_\mu K^\mu \; = \; \int_{\partial V} d\sigma_\mu K^\mu \tag{۲}$$

ب) حالا برای لاگرانژی کلی بالا، با استفاده از قاعده ی زنجیره ای و معادلات اویلر-لاگرانژ(معادلات حرکت میدان) مقدار δL را ساده کنید. پس از آن با استفاده از برابرقرار دادن این مقدار با مقداری که در قسمت قبل یافته بودید، نشان دهید:

$$\partial_\mu J^\mu \; = 0 \;\; \text{where} : J^\mu \; = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \, \delta\phi^A \; - \; K^\mu \tag{۳}$$

(آیا روی اندیس A، جمع وجود دارد؟)
پ) استدلال کنید اگر در رابطه ی J^μ ضریبی دلخواه از تبدیل بی نهایت کوچک (مولد تبدیل) وارد شود، باید آنرا از جریان حذف کرد.
ت) از معادله ی پایستگی جریان و قضیه ی دیورژانس بار پایسته مربوط به هر جریان نوتر رابیابید.

راهنمایی عملی برای یافتن K^μ در یک لاگرانژی خاص : لاگرانژی را وردش دهید تا به فرم دیورژانس کامل درآید($\alpha \partial_\mu K^\mu$)، آنگاه K^μ را ازآن بخوانید.
حالا به بررسی تعدادی مثال مهم می پردازیم:

بار الکتریکی و تقارن U۱

تحت تبدیل $U1$ داریم : $\phi \to \phi \, e^{i\alpha}$ ، با فرض کوچک بودن α، جریان نوتر و بار پایسته، مربوط به این تبدیل تقارنی را برای دو لاگرانژی زیر بیابید.
ث) لاگرانژِی کلاین-گردن حقیقی : $L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$
ج) لاگرانژی کلاین-گردن مختلط: $L = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$
توجه کنید که میدان مختلط دو درجه آزادی دارد، حال استدلال کنید که چرا می توان ϕ و ϕ^* را دو مولفه ی مستقل میدان گرفت؟
(در درس نظریه میدان کوانتومی خواهید دید که این جریان وبار پایسته همان کمیات جریان و بار "الکتریکی" هستند! اگر به کلاین-گردن مختلط توجه کنید، علامت دو عبارتی که از تغییرات ϕ و ϕ^* به بار پایسته سهم میدهند قرینه ی یکدیگرند، بنابراین این لاگرانژی دو ذره با بار الکتریکی مخالف را توصیف میکند!)

تانسور انرژی-تکانه و تقارن انتقال

همان طور که ابتدای سوال بیان کردیم، برای انتقال در مکان-زمان می توان x^μ در آرگومان میدان را ثابت گرفت و در عوض خود میدان را تبدیل کرد : $\phi \to \phi \, + \, a^\mu\partial_\mu\phi$
، که در آنa^μ ، برداری دلخواه و بی نهایت کوچک می باشد. با همین استدلال(بسط نیلور تا مرتبه ی اول) می توان گفت که لاگرانژی نیز مانند میدان ϕ تبدیل می شود. حال، برای لاگرانژی های زیر جریان نوتر را بیابید.
چ) لاگرانژی کلاین-گردن حقیقی.
ح) لاگرانژی الکترومغناطیس $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
خ) در عباراتی که در بالا برای بردار جریان یافتید از دلخواه بودن a^μ استفاده کنید و تانسوری با مرتبه ی دو پیدا کنید که در $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ صدق کند. این تانسور ، تانسور انرژی-تکانه نام دارد.
د) عباراتی انتگرالی برای تکانه و انرژی کل سیستم بیابید.

۲ معادلات ماکسول

الف) معادلات ماکسول را در نظر بگیرید. نشان دهید می توان قسمت ناهمگن معادلات را به فرم ساده شده ی زیر نوشت.

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu = J^\mu$$

که در این رابطه A^μ و J^μ چهاربردار پتانسیل و جریان هستند. و همچنین در پیمانه مورد نظر داریم:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

ب) اگر تانسور میدان الکترومغناطیس را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

نشان دهید که می توان معادلات را ماکسول را به صورت زیر نوشت:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = J^\mu$$

ج) چگالی لاگرانژی الکترومغناطیس را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu$$

با وردش گرفتن از این لاگرانژی نسبت به A^μ معادلات ناهمگن ماکسول را بدست آورید.

د) نشان دهید:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$$

که در این رابطه E و B میدان های الکتریکی و مغناطیسی هستند.

ه) با استفاده از لاگرانژی الکترومغناطیس ، هامیلتونی الکترومغناطیس را بدست آورید. برای سادگی فرض کنید که جریان خارجی صفر باشد. نشان دهید:

$$\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + E_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

لطفاً نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود و نام دستیار آموزشی را بالای برگه تحویلی بنویسید. می توانید از تمرین ها عکس گرفته و آن ها را با عنوان HW۷ به آدرس زیر ارسال کنید. تمرین های ناخوانا تصحیح نخواهند شد.

m.ansari1373@gmail.com