۱

نسبیت عام نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ — ۲۷ اردیبهشت ۹۹

نمودارهای همدیس Conformal Diagrams.

فضا-زمان‌هایی که جواب معادلهٔ اینشتین هستند، می‌توانند بسیار پیچیده باشند. البته تقارن‌ها کمک می‌کنند که ساختار فضا-زمان را بهتر و راحت‌تر درک کنیم.

رسم نمودارهای فضا-زمان برای بررسی ساختار علّی Causal Structure بسیار مهم است.

ویژگی‌هایی که نمودارهای فضا-زمان را مناسب‌تر می‌کنند.

۱- بی‌نهایت‌های مختصات رفع شده باشند (تکینگی مختصات)

۲- مخروط‌های نوری با زاویهٔ $45°$ در فضا-زمان نمایش داده شوند.

۳- نمودار فضا-زمان دارای یک مختصه زمان‌گونه (time-like) و یک مختصه فضاگونه باشد (Space-like)

۴- بی‌نهایت‌ها به مختصه محدود تصویر شوند.

تبدیلات همدیس Conformal transformation امکان می‌شده ۴ را دارند.

حال منظور استفاده از تبدیل مختصات به x^{μ} باشد که در مختصه T , R (زمان‌گونه - فضاگونه) داشته باشد که همچنین $\frac{dT}{dR} = \pm 1$ باشد.

به نمودارهای همدیس نمودار کارتر-پنروز Carter-Penrose یا دیاگرام پنروز Penrose diagram می‌گویند.

برای شروع از متریک مینکوفسکی استفاده می‌کنیم.

$$(1) \qquad ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad , \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$-\infty < t < +\infty \qquad 0 \leq r < \infty$$

به خاطر انتخاب مختصه کروی $r = 0$ با یک چارت قابل پوشش نیست، ولی می‌دانیم که این مشکل به دلیل انتخاب دستگاه مختصات است و بدون نگرانی بررسی این فضا را ادامه می‌دهیم.

برای بررسی ساختار علّی فضا-زمان فرض می‌کنیم که بتوانیم بی‌نهایت‌ها را به مختصه محدود بیاوریم.

تبدیل اولیه که به ذهن می‌رسد تبدیل arctg است که مختصه را محدود می‌کند و مخروط‌های نوری را از حالت استاندارد 45° خارج می‌کند به ضرب و تقسیم آن توجه کنید.

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} \bar{t} = \operatorname{arctg} t \\ \bar{r} = \operatorname{arctg} r \end{array}\right\} ds^2 = -\frac{1}{\cos^4\bar{t}} d\bar{t}^2 + \frac{1}{\cos^4\bar{r}} d\bar{r}^2 + \operatorname{tg}^2\bar{r} \, d\Omega^2$$

که متریک فوق دارای محدوده

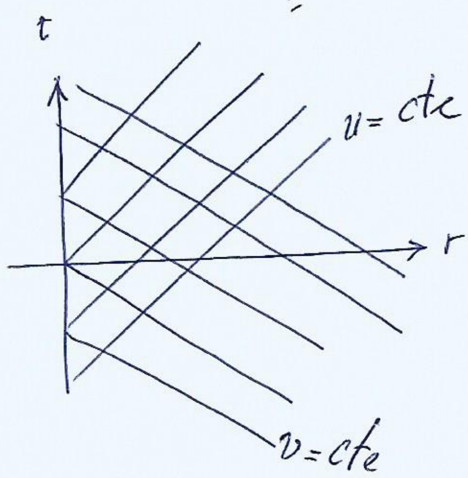
$$(3) \qquad \begin{cases} -\pi/2 < \bar{t} < \pi/2 \\ 0 \leq \bar{r} < \pi/2 \end{cases}$$

ولی $\dfrac{d\bar{t}}{d\bar{r}} = \pm \dfrac{\cos^2\bar{t}}{\cos^2\bar{r}}$ برابر ± 1 نیست.

برای حل این مسئله ابتدا به مختصه نول‌گونه خواهیم رفت سپس با استفاده از تابع arctg به مختصه محدود خواهیم رفت

$$(4)\quad \begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases}$$

(شکل 1)



$-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$ $\quad u \leq v$

هر نقطه در نمودار شکل 1) یک کره S^2 با شعاع $r = \frac{1}{2}(v-u)$ است

ترکیب مینکوفسکی در مختصه Null به شکل زیر است.

$$(5)\quad ds^2 = -\frac{1}{2}(du\,dv + dv\,du) + \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2$$

حال با استفاده از arctg مختصه زیر را تعریف می‌کنیم

$$(6)\quad \begin{cases} U = \operatorname{arctg} u & -\pi/2 < U < \pi/2 \\ V = \operatorname{arctg} v & -\pi/2 < V < \pi/2 \end{cases} \qquad U \leq V$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$(7)\quad \begin{cases} du\,dv + dv\,du = \dfrac{1}{\cos^2 U \cos^2 V}(dU\,dV + dV\,dU) \\[2ex] (v-u)^2 = (\tan V - \tan U)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} \sin^2(V-U) \end{cases}$$

درنتیجه متریک مینکوفسکی به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$(8)\qquad ds^2 = \frac{1}{4\cos^2 U \cos^2 V}\left[-2\left(dU\,dV + dV\,dU\right) + \sin^2(V-U)\, d\Omega^2\right]$$

حال کمی دیگر می‌توانیم به مختصه زمان‌گونه - فضاگونه برگردیم.

$$(9)\qquad T = V+U \qquad R = V-U$$

$$0 \leq R < \pi \quad , \quad |T| + R < \pi$$

حال متریک مینکوفسکی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$(10)\qquad ds^2 = w^{-2}(T,R)\left(-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R\, d\Omega^2\right)$$

که w به شکل زیر به مختصه (T,R) ربط خواهد داشت.

$$(11)\qquad w = 2\cos U \cos V = 2\cos\left[\frac{1}{2}(T-R)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(T+R)\right]$$

$$= \cos T + \cos R$$

جالب است که به نظر می‌رسد متریک مینکوفسکی با یک فاکتور همدیس به متریک غیرفیزیکی $d\tilde{s}^2$ به شکل زیر مرتبط است.

$$(12)\qquad d\tilde{s}^2 = w^2(T,R)\, ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R\, d\Omega^2$$

که متریک بالا شناخته شده $R \times S^3$ است که S^3 از سطح فضاگونه است

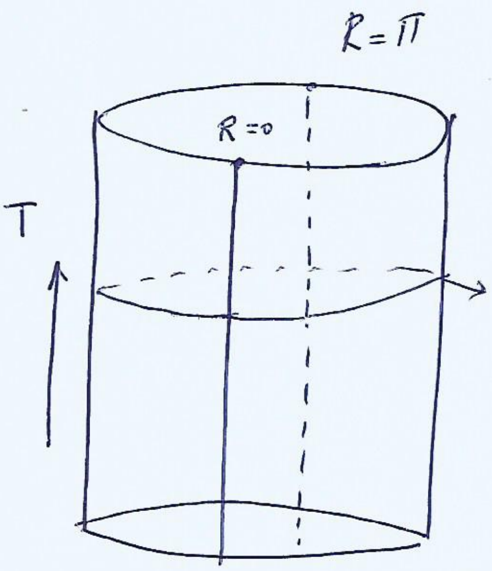
three-sphere

Einstein's Static Universe.

با خمینه $R \times S^3$ به صورت زیر است که می‌توانیم آن را با یک خمینه (استوانه‌ای) نمایش دهیم.

(13) $-\infty < T < +\infty$

$0 \leqslant R \leqslant \pi$



شکل 2)

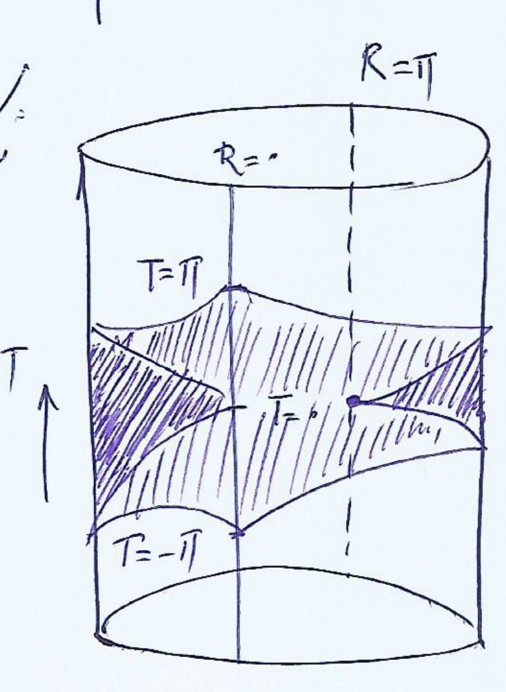
در جاکه فضای مینکوفسکی ناحیه کوچکی از این خمینه است.

(14) $0 \leqslant R < \pi$ $\quad |T| + R < \pi$

اگر $R = 0 \to |T| < \pi \to -\pi < T < \pi$

اگر $R = \pi \to |T| < 0$

شکل 3)



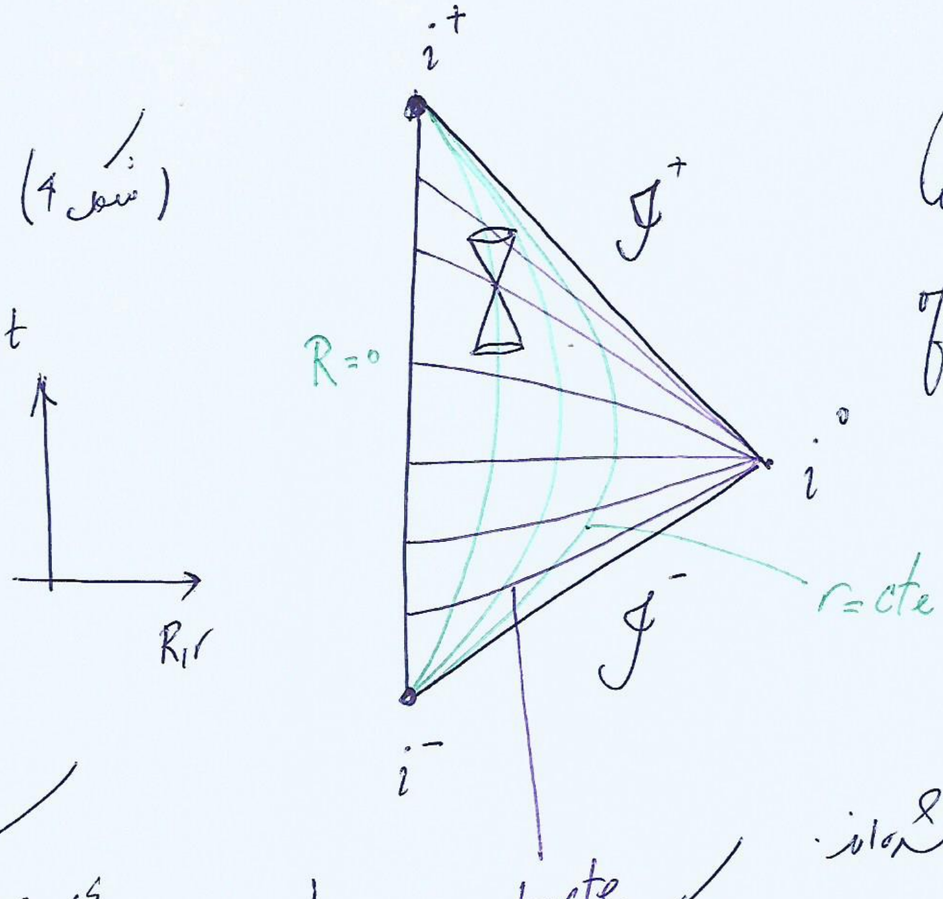
ناحیه هاشورخورده مربوط به فضای مینکوفسکی است

اگر این را باز کنیم به شکل نمودار همدیس دیگر

ناحیه زیر می‌رسیم.

در واقع فضای مینکوفسکی قسمت (ناحیه) کوچکی است

(شکل 4)



Conformal Diagram of Minkowski-space.

به نقاط خاصه مختصه که در نقش شده اند.

- این عمل conformal compactification گویند. این نمودار فضا-زمان را به قسمت‌هایی تقسیم کنند.

i^+ = future time-like infinity $(T = \pi,\ R = 0)$

i^0 = spatial infinity $(T = 0,\ R = \pi)$

i^- = past timelike infinity $(T = -\pi,\ R = 0)$

$\mathcal{J}^+$ = future null infinity $(T = \pi - R,\ 0 < R < \pi)$

$\mathcal{J}^-$ = past null infinity $(T = -\pi + R,\ 0 < R < \pi)$

7,

نکته مهم این است که i^+ و i^0 و i^- نقطه هستند زیرا $R=0$ و $R=\pi$ قطب های کره S^3 هستند. درحالی که $\mathcal{I}^+$ و $\mathcal{I}^-$ از صفحه های پوچ Null surfaces با توپولوژی $R\times S^2$ هستند.

ویژگی های جالبی در نمودار همدیس مینکوفسکی وجود دارد.

- مخروط های نوری در فضا-زمان بصورت مخروط های 45° هستند.
- تمام ژئودزی های زمان گونه از i^- شروع شده به i^+ ختم می شوند.
- تمام ژئودزی های نورگونه از $\mathcal{I}^-$ شروع و به $\mathcal{I}^+$ ختم می شوند.
- تمام ژئودزی های فضاگونه از i^0 شروع و به همان جا ختم می شوند.

فضا-زمان های جالب تحت asymptotically flat درنظر نامیده می شوند که ویژگی $\mathcal{I}^+$، $\mathcal{I}^-$ و i^0 را با فضای مینکوفسکی مشترک باشند.

نمودار همدیس برای فضا-زمان های پیچیده تر بسیار مفید هستند

به طور مثال فرض کنید فضا-زمان کیهان منبسط شونده را در نظر بگیرید.

برای کیهان منبسط شونده تخت زیر را در نظر می گیریم.

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (15)$$

که فرض کرده ایم که عامل مقیاس رفتار توانی داشته باشد $a(t) = t^q$; $0<q<1$

یکی از مشخصات های این متریک با مینکوفسکی در نگاشتی $t=0$ است که مولفه‌های متریک را به صورت زیر به دست می‌دهد.

$$0 < t < \infty \qquad (16)$$
$$0 < r < \infty$$

متریک FRW را با استفاده از تبدیل خاصی به صورت همدیس می‌توانیم به متریک مینکوفسکی ربط دهیم. مختصه جدید η را که به آن زمان همدیس Conformal time می‌گوییم ربط دهیم.

$$dt^2 = t^{2q}\, d\eta^2 \rightarrow \eta = \frac{1}{1-q}\, t^{1-q} \qquad (17)$$

این انتخاب به ما اجازه می‌دهد که متریک FRW را به صورت زیر بنویسیم.

$$ds^2 = \left[(1-q)\eta\right]^{2q/1-q} \left(-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (18)$$

$$0 < \eta < \infty$$

η مختصه زمان‌گونه است. $ds^2(\partial_\eta, \partial_\eta) < 0$. باید توجه داشت که η مختصه همراه نیست.

حال که متریک FRW را به شکل همدیس به دست آورده‌ایم می‌توانیم تبدیلات زیر را با جایگذاری η به جای t به دست آوریم.

$$(19) \quad \begin{cases} u = \eta - r \\ v = \eta + r \end{cases} \qquad \begin{cases} U = \operatorname{arctg} u \\ V = \operatorname{arctg} v \end{cases} \qquad \begin{cases} T = V + U \\ R = V - U \end{cases}$$

این تبدیلات باعث می‌شوند که متریک FRW را به شکل زیر بنویسیم.

$$ds^2 = w^{-2}(T,R)\left(-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R\, d\Omega^2\right) \tag{20}$$

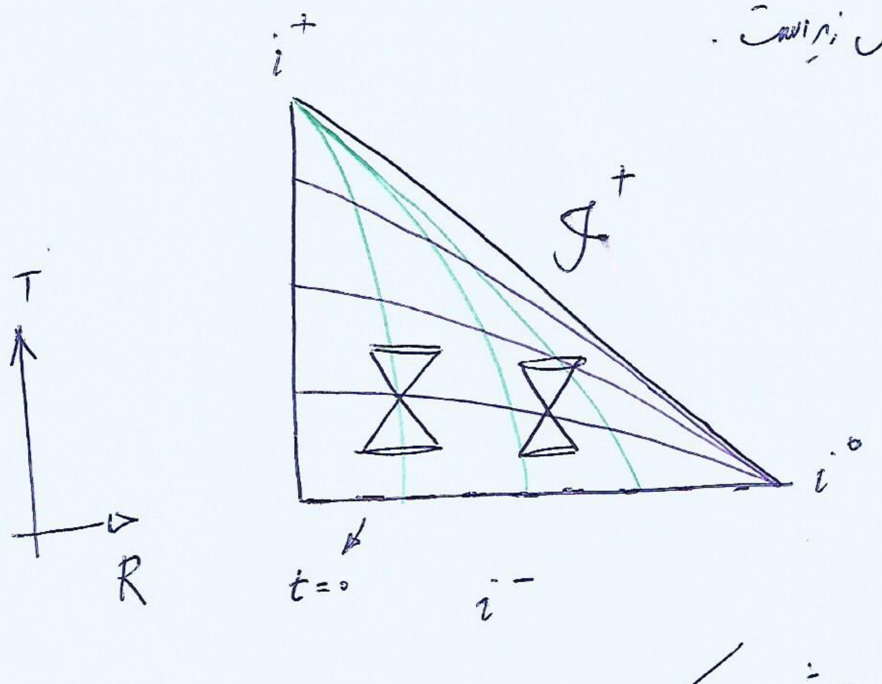
که

$$0 < R \,, \quad 0 < T \,, \quad T + R < \pi$$

که نسبت همدیس Conformal factor به‌طور زیر به دست می‌آید.

$$w(T,R) = \left(\frac{\cos T + \cos R}{2 \sin T}\right)^{2q} (\cos T + \cos R) \tag{21}$$

نمودار پنروز FRW به شکل زیر است.



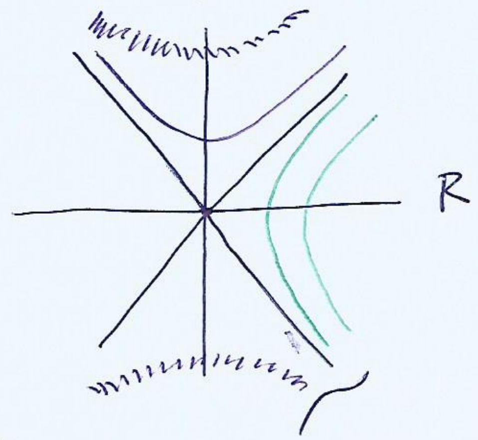
این نمودار اشکال بحث درباره تابش زمینه ای، افق ذره، بحث مسئله افق

Horizon-problem را آشکار می‌کند.

مجدداً به مشکل (راه حل) شوارتزشیلد برمی‌گردیم. راه حل شوارتزشیلد به شکل کروسکال با تمام زوایا، در نواحی مختصات در دسترس نیستند.

$$(22)\quad ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}\left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2 d\Omega^2$$

$$(23)\quad T^2 - R^2 = cte \quad , \quad \frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right)$$



$$(24)\quad T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}$$

برای بدست آوردن نمودار پنروز شوارتزشیلد از شکل پوچ آن Null-version شروع می‌کنیم

$$(25)\quad ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}\left(dv'du' + du'dv'\right) + r^2 d\Omega^2$$

که r از رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$(26)\quad v'u' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM}$$

حال به طریق مشابه تبدیل arctg را در فضای تخت دیدیم، مجدداً استفاده می‌کنیم.

$$(27)\quad v'' = \arctg\left(\frac{v'}{\sqrt{2GM}}\right)$$

$$(28)\quad u'' = \arctg\left(\frac{u'}{\sqrt{2GM}}\right)$$

دامنه مولفه‌های جدید به شکل زیر است.

$$-\frac{\pi}{2} < v'' < +\frac{\pi}{2} \tag{29}$$

$$-\frac{\pi}{2} < u'' < +\frac{\pi}{2} \tag{30}$$

$$-\frac{\pi}{2} < v''+u'' < \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

این مختصه به صورت conformal در مختصه (v'', u'') به ترتیب مینکوفسکی ربط دارد.
شکل مختصه شوارتزشیلد در دیاگرام پنروز به شکل زیر است.