امواج گرانشی :

در این سری از درس نامه‌ها به یکی از مهم‌ترین و هیجان انگیزترین پیش بینی های نسبیت عام خواهیم پرداخت: امواج گرانشی! با کشف امواج گرانشی در سال 2015 از دو برخورد سیاهچاله، دریچه جدیدی بر روی دانش در حوزه گرانش، کیهان‌شناسی گشوده شده است.

- Observation of Gravitational Wave from a Binary Black Hole Merger, B.P. Abott et al. PRL 116, 061102 (2016)

14 September 2015 @ 09:50:45 UTC

دو تداخل سنج لیزری امواج گرانشی Laser Interferometer GW observatory (LIGO) امواج گرانشی عبوری را آشکارسازی کردند.

سیگنال در بازه فرکانسی 35 تا 250 هرتز بوده، و قله تنش موج گرانشی از مرتبه 1.0×10^{-21} بوده است. موج دریافتی در تطابق با wave form پیش بینی شده از نسبیت عام بوده است.

موج با سیگنال به نوفه 24 - Signal to Noise , false alarm 1 رویداد در 203,000 سال رصد شده است که این دارا با درجه اطمینان 5.1σ است.

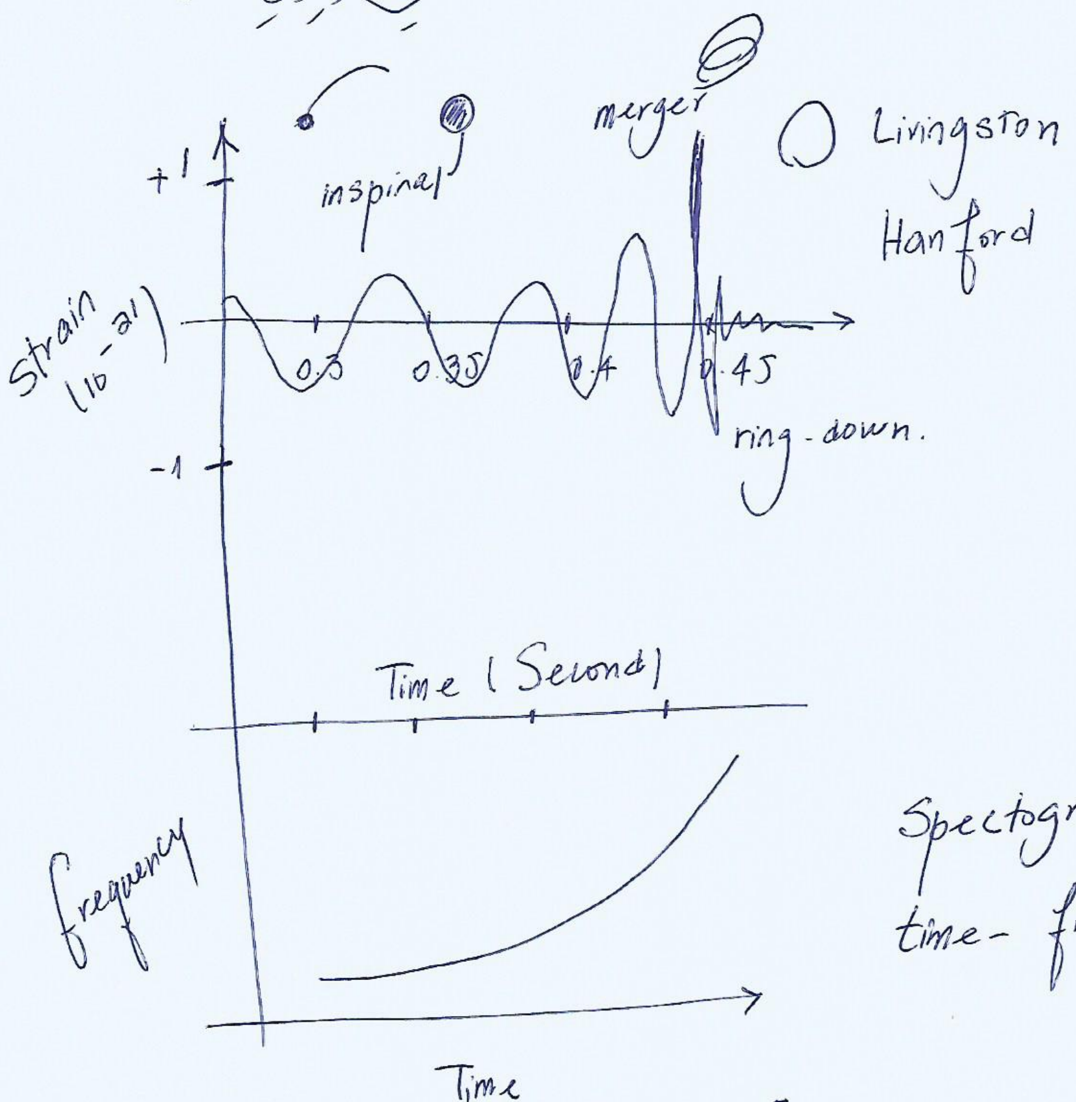
رویداد در فاصله درخشندگی 410^{+160}_{-180} Mpc معادل انتقال به سرخ $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$ بوده

2,

در دستگاه تحقیقات منبع جرم سیاهچاله‌ها را برابر با، و جرم نهایی $M_f = 62^{+4}_{-4} M_\odot$ است.

$M_1 = 36^{+5}_{-4} M_\odot$ ، $M_2 = 29^{+4}_{-4} M_\odot$

این مدل بیانگر است که $M c^2_{rad} \ast 3.0^{+0.5}_{-0.5}$ انرژی امواج گرانشی ساطع شده است. تمام حدود اطمینان گزارش شده در بازه ۹۰٪ است. این به معنا وجود سیاهچاله‌های دوتایی اخترفیزیکی است.



Spectograph
time-frequency representation

سیگنال ابتدا به L1 رسیده است و بعد از $6.9^{+0.5}_{-0.4}$ ms بعد به آشکارساز H1

$$(1) \quad \mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G}\left[\frac{5}{96}\pi^{-8/3} f^{-11/3}\dot{f}\right]^{3/5}$$

فرکانس تابع زمان   مشتق زمانی

Chirp-mass

3,

$\mathcal{M}$ را جرم Chirp گویند. m_1 ، m_2 به ترتیب جرم سیاهچاله های 1، 2 است، $f=f(t)$ فرکانس بر حسب زمان در دسترس می‌باشد.

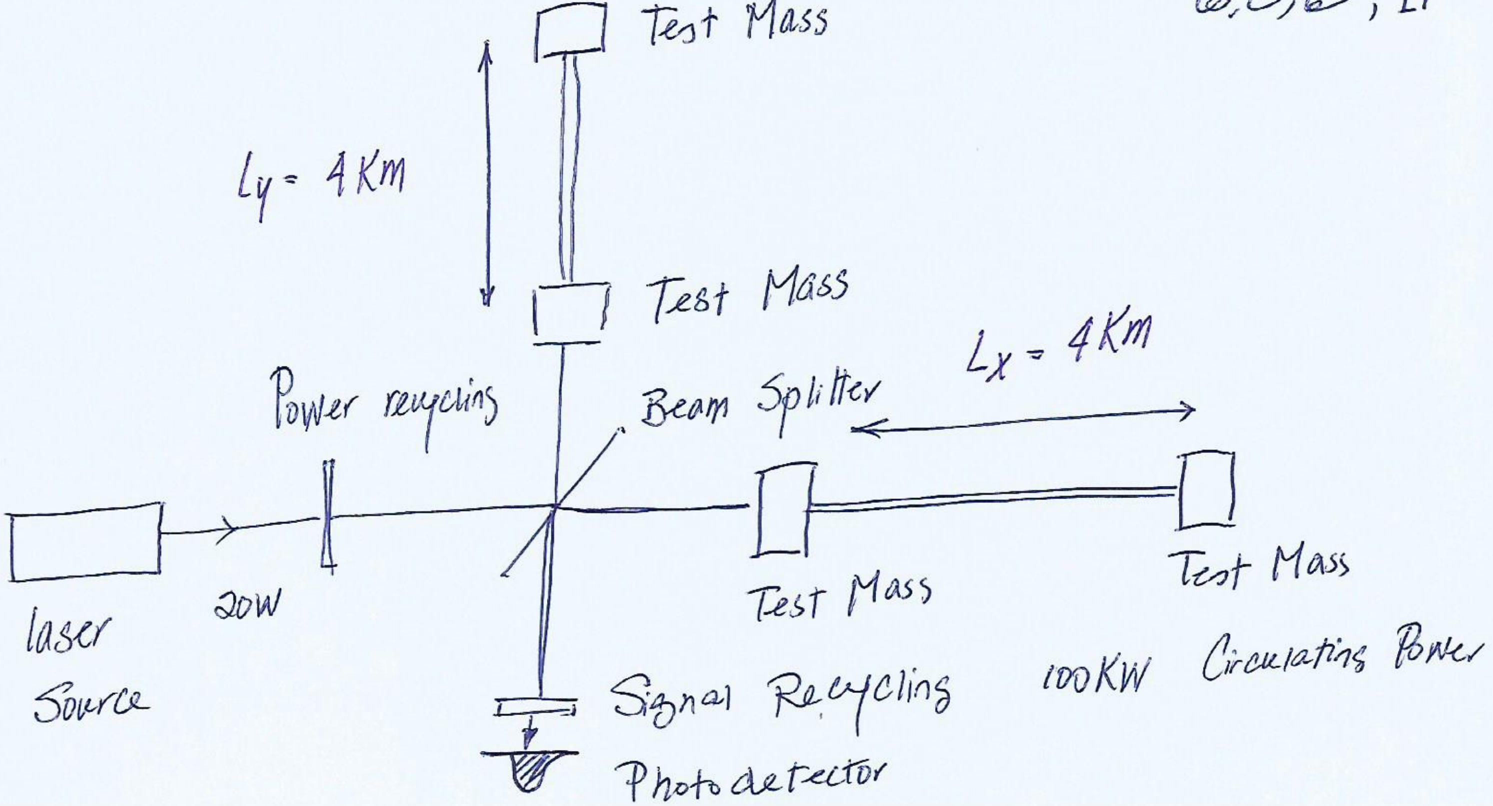
برازش داده‌های تجربی نشان می‌دهد که جرم Chirp $\mathcal{M} \simeq 30 M_\odot$ است و جرم کل $M_t = m_1+m_2 \gtrsim 70 M_\odot$ این مقدار شعاع شوارتزشیلد $\frac{2GM}{c^2} \gtrsim 210\,Km$ را به دست می‌دهد.

برای رسیدن به فرکانس 75 HZ مداری که نصف فرکانس امواج گرانشی است. اجرام باید بسیار فشرده و بسیار نزدیک به هم باشند (از مرتبه 350 Km).

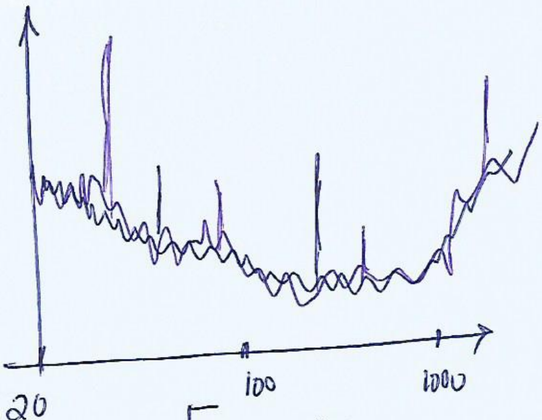
منبع نمی‌تواند ۲ عدد نوترون ستاره باشد زیرا جرم آن‌ها بسیار کم است. گزینه یک ستاره نوترونی و یک سیاهچاله نیز ممکن نیست چون جرم کل باید بسیار زیاد باشد، در نتیجه ادغام در فرکانس های پایین رخ خواهد داد.

در نتیجه دو سیاهچاله می‌توانند فشرده و با جرم قابل قبول به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک شوند.

□ آشکارسازها



- خود ایستگی 4Km است. نمودار نوفه هر کدام از آشکارسازها به صورت زیر است.



یکی از جذاب‌ترین اهداف سیاهچاله‌ها آهنگ برخورد این اجرام است. با کمک رویداد GW150914 آهنگ $2-400\ Gpc^{-3}\ yr^{-1}$ به دست آمده است.

11 رویداد در O1, O2 در سال‌های 2015-2017 به دست آمده است. نتایج جالب توجه به شرح زیر است.

1) GW150914 — اولین کشف شده امواج گرانشی

2) GW170817 — اولین مشاهده برخورد دو ستاره نوترونی

3) GW170608 — $M_1 = 10.9^{+5.3}_{-1.7} M_\odot$ $M_2 = 7.6^{+1.3}_{-2.1} M_\odot$ کوچکترین جرم‌های رصد شده در O2, O1

4) GW170729 — $M_1 = 50.6^{+16.6}_{-10.2}$ $M_2 = 34.3^{+9.1}_{-10.1}$ بزرگترین جرم مولدها

5) GW170814 — اولین رویداد که H, L, Virgo شناسا کرده

اولین حد تعیین

در O3 - Run دو رویداد تعیین

en. wikipedia.org/wiKi/List_of_gravitational_wave_observation

- Gravitational Waves: Volume 1: Theory & Experiments
  Michele Maggiore - 2007
- Gravitational Wave: Volume 2: Astrophysics & Cosmology
  Michele Maggiore - 2018
- arXiv: 0709.4682 Alessandra Buonanno
- UMD / AEI graduate course
  http://www.aei.mpg.de/2000472
- E.E. Flanagan & S.A. Hughes' review: arXiv:0501041

□ اختلال حول فضا-زمان تخت

کنش گرانش به صورت $S = S_E + S_M$ که

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, R \tag{2}$$

کنش اینشتین هیلبرت است، و S_M کنش ماده است. تانسور انرژی-تکانه از وردش کنش ماده به دست می‌آید

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{3}$$

که وردش کل معادله اینشتین را به دست می‌دهد.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4}$$

نسبیت عام تحت گروه تقارنی تبدیل مختصات ناوردا است

$$x^\mu \to x'^\mu(x) \qquad (5)$$

$\downarrow$

invertible, differentiable, inverse diff.

در نتیجه $x'^\mu(x)$ تبدیل diffeomorphism دلخواه است. تحت تبدیل (5) متریک به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \qquad (6)$$

به این آزادی و تقارن، تقارن پیمانه ای می گوییم gauge symmetry !

برای درک امواج گرانشی معادلات اینشتین را با اختلال حول تخت بررسی می کنیم.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \qquad (7)$$

حال معادلات را در رتبه خطی $h_{\mu\nu}$ بسط خواهیم داد. نظریه به دست آمده را نظریه خطی اینشتین می نامیم.

حال برای بررسی رابطه (7) باید دستگاه مختصات خاصی را انتخاب کنیم که general-covariance را از بین خواهد برد. از این رو باید احتیاط جدی در مورد درجات آزادی داشته باشیم.

فرض کنید تبدیل مختصات

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \qquad (8)$$

مشتق $|\partial_\mu \xi_\nu|$ از رتبه $|h_{\mu\nu}|$ است. اگر این تبدیل را در رابطه (6) قرار دهیم برای قسمت اختلالی متریک خواهیم داشت.

$$h_{\mu\nu}(x) \to h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \qquad (9)$$

در نتیجه اگر $\partial_\mu \xi_\nu$ از مرتبه $h_{\mu\nu}$ باشد در نتیجه diff بی‌نهایت کوچک نظریه معتبر است.

از طرف دیگر می‌توانیم تبدیل لورنتس را اعمال کنیم.

$$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{10}$$

که طبق تعریف $\Lambda^\mu{}_\nu$ در رابطه $\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$ صدق می‌کنند.

تحت تبدیل لورنتس

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma g_{\rho\sigma} \tag{11}$$

$$= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \left[\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x) \right]$$

$$= \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}(x)$$

در نتیجه تحت تبدیل لورنتس $g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x')$ که

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}(x) \tag{12}$$

در نتیجه $h_{\mu\nu}$ یک تانسور است $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ با دوران دچار مشکل نمی‌شود در مورد بوست‌ها باید مراقبت کرد که شرط کوچک بودن $h_{\mu\nu}$ را از بین نبرد. همچنین $h_{\mu\nu}$ تحت تبدیل پاریته ناوردا می‌ماند. در قدم بعد تانسور ریمان را تا مرتبه خطی در $h_{\mu\nu}$ محاسبه کنیم.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu\sigma} h_{\mu\rho} \right) \tag{13}$$

کمیت های زیر را تعریف می‌کنیم که شکل معادلات خطی را ساده‌تر می‌کند

(14) $$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad : \text{Trace}$$

(15) $$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$$

جالب این است که

در نتیجه $\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$

(16) $$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \rightarrow h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\,\eta_{\mu\nu}$$

در نظریه خطی اندیس ها با تعریف $\eta_{\mu\nu}$ را می‌توان بالا و پایین کرد.

تمرین سری ۲: نشان دهید که معادله اینشتین در نظریه خطی و با تعریف $\bar{h}, \bar{h}_{\mu\nu}$

سؤال ۴

به صورت زیر خواهد بود.

(17) $$\Box \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

حال با استفاده از آزادی پیمانه‌ای $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \left(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu\right)$ می‌توانیم

پیمانه لورنتس Lorentz gauge (Harmonic gauge, Hilbert gauge)

De Donder gauge

را انتخاب کنیم.

(18) $$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

سؤال تاریخی: لورنتس کیست؟

معادله آزادی پیمانه‌ای برای ترم $\bar{h}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$(19) \qquad \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho)$$

$$(20) \qquad \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \Box \xi_\mu$$

در نظر بگیرید $\Box$ - دالامبرین فضای تخت $\Box = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu \partial^\mu$. اگر در مختصه $h_{\mu\nu}$ داشته باشیم

$$(21) \qquad \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = f_\mu(x) \rightarrow \begin{cases} (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = 0 \\ \Box \xi_\mu = f_\mu(x) \end{cases}$$

رابطه فوق حتماً جواب به شکل تابع گرین دارد.

$$(22) \qquad \begin{cases} \Box_x G(x-y) = \delta^4(x-y) \\ \xi_\mu(x) = \int d^4x \; G(x-y) f_\mu(y) \end{cases}$$

در این پیمانه خاص معادله انیشتین به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(23) \qquad \boxed{\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

توجه داشته باشید که $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ، ۴ معادله است در نتیجه ۱۰ درجه آزادی ترم به 6 درجه تبدیل می‌شود. این رابطه و معادله انیشتین $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$ را نتیجه می‌دهد که رابطه پایستگی تکانه انرژی در نسبیت خطی است.

پایان درس