۱۲ خرداد ۱۳۹۹ — نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ — نسبیت عام

# سیاه‌چاله چرخان
# Rotating (Kerr) Black Hole

راه حل سیاه‌چاله چرخان بر خلاف شوارتزشیلد و RN، سال‌ها بعدتر از نسبیت عام به دست آمد.

Kerr - کِر 1963 این راه حل را پیشنهاد کرد.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}\,(dt\,d\phi + d\phi\,dt) + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]d\phi^2 \qquad (1)$$

که

$$\begin{cases} \Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \\ \rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta \end{cases}$$

دو پارامتر $M$ و $a$ جواب‌های کر را دسته‌بندی می‌کنند. باید توجه داشته باشیم که در این جواب، تقارن کروی را نداریم و به جای آن تقارن محوری axial symmetry موجود است. از این رو ترم ضربدری $dt\,d\phi$ در ترکیب ظاهر می‌شود. البته باید توجه داشته باشیم که ترکیب کاملاً ایستا stationary است. همچنین

$$a = J/M \qquad (2)$$

تکانه زاویه‌ای در واحد جرم است.

توجه داشته باشید که $J$ ، اندازه حرکت زاویه ای کومار Komar angular momentum است.

برای نگاه کردن به سیاهچاله چرخان باردار کافی است که

$$(3) \qquad 2GMr \longrightarrow 2GMr - G(Q^2 + P^2)$$

که متریک کر-نیومن را خواهیم داشت. " Kerr – Newman Metric "

مولفه های چاربردار پتانسیل به صورت زیر است.

$$(4) \qquad A_t = \frac{Qr - Pa\cos\theta}{\rho^2} \; ; \; A_\phi = \frac{-Qar\sin^2\theta + P(r^2 + a^2)\cos\theta}{\rho^2}$$

ویژگی های اصلی متریک کر بدون حضور منبع الکتریکی، مغناطیسی وجود دارد. از این رو $P = Q = 0$

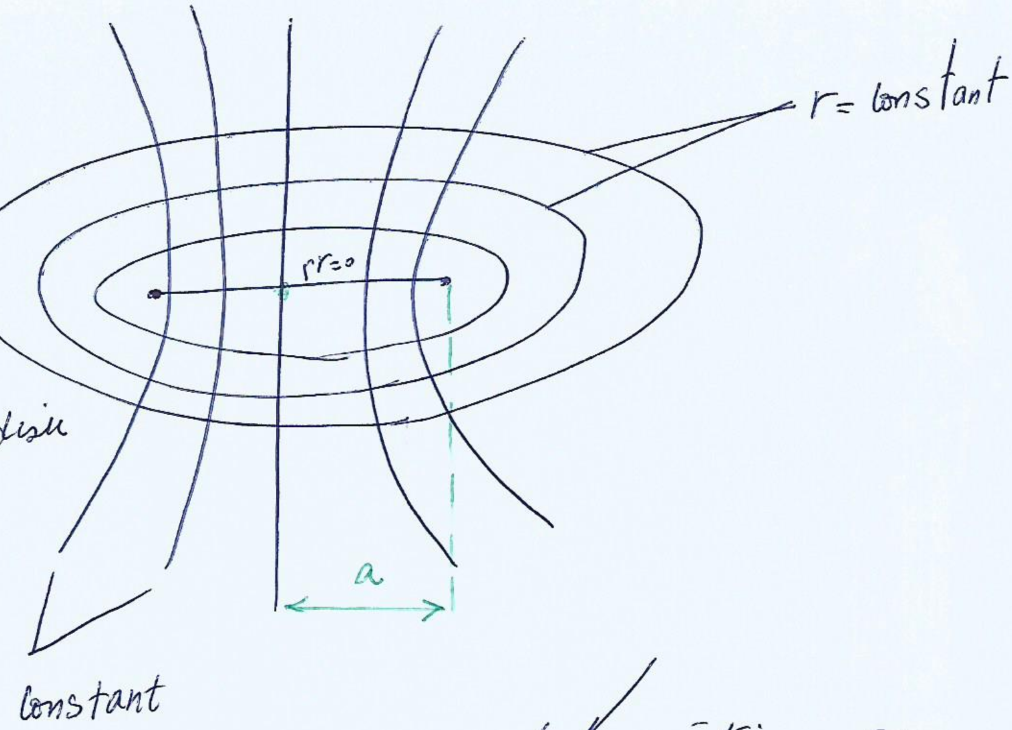
مختصه $(t, r, \theta, \phi)$ را که در متریک (1) استفاده کردم، مختصه Boyer–Lindquist Coordinate می گوییم. در صورتی که $a \to 0$ ، متریک شوارتزشیلد را به دست خواهیم آورد. حال اگر $M \to 0$

می توانیم فضا-زمان تخت را در مختصه بیضی گونه به صورت زیر به دست آورد.

$$(5) \qquad ds^2 = -dt^2 + \frac{(r^2 + a^2\cos^2\theta)}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\, d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta \, d\phi^2$$

نشان دهید فضای این مختصه تخت است، و شکل زیر آن را بیابید.

3,




(1 شکل)

r=0 2 dimensional disk

$r=0,\ \theta=\pi/2$ ring
at the boundary of disk

ارتباط این مختصات با دستگاه کارتزین به صورت زیر است.

(6)
$$\begin{cases} x = (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\cos\phi \\ y = (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

متریک دارای دو بردار کیلینگ Killing Vector است.

(7) $$K = \partial_t \qquad R = \partial_\phi$$

$R^\mu$ نشان دهنده محور تقارن است. مولفه های متریک مستقل از $t$, $\phi$ هستند.

متریک استاتیک static نیست

همچنین یک تانسور Killing وجود دارد.

(8) $$\sigma_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu}n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}$$

که در تانسور فوق

(9) $$l^{\mu} = \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2, \Delta, 0, a\right)$$

$$n^{\mu} = \frac{1}{2\rho^2}\left(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a\right)$$

هر دو بردار پوچ و در روابط های زیر صدق می کنند.

(10) $$l^{\mu} l_{\mu} = 0 \qquad n^{\mu} n_{\mu} = 0 \qquad l^{\mu} n_{\mu} = -1$$

□ افق سیاهچاله کِر

دستگاه مختصات کِر به گونه ای انتخاب شده است که $g^{rr} = 0$ افق سیاهچاله را مشخص می کند.

(11) $$\begin{cases} g^{rr} = \Delta / \rho^2 \\ \rho^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 = 0$$

$$r_{\pm} = +GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2}$$

همانند سیاهچاله RN ، ۳ حالت برای سیاهچاله kerr وجود دارد.

$GM > a$   ۲ افق

(12) $GM = a$ : Extremal case - ناپایدار

$GM < a$ : Naked singularity   تکینگی برهنه

در نتیجه بر روی حالت $GM > a$ متمرکز می‌شویم. در این حالت دو شعاع خواهیم داشت که هر دو از صفحه نورگونه هستند

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \tag{13}$$

از آن جائی که سیاهچاله کر ایستا stationary هست ولی static نیست. $r_{\pm}$ افق کیلینگ نخواهد بود. بردار کیلینگ $K = \partial_t$ دارای نرم

$$K^{\mu} K_{\mu} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\Delta - a^2 \sin^2\theta\right) \tag{14}$$

این بردار در $r = r_+$ که $\Delta = 0$ خواهیم داشت

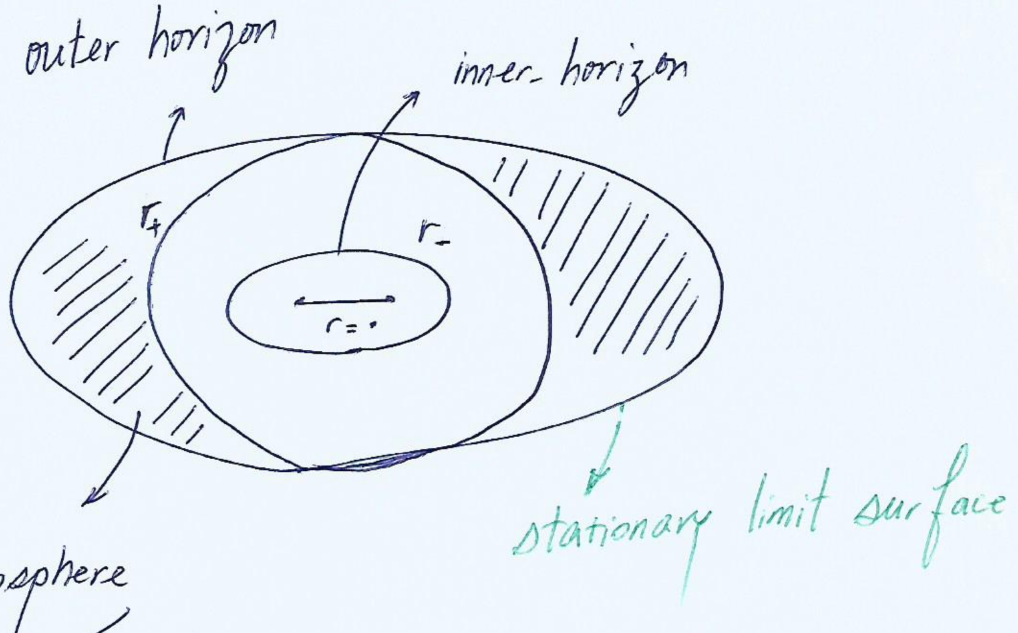
$$K^{\mu} K_{\mu} = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2\theta \geq 0 \tag{15}$$

این بدین معنا است که افق خارجی فضاگونه است به غیر از قطب‌ها $\theta = 0, \pi$ که نورگونه است. صفحه ایستا، $K^{\mu} K_{\mu} = 0$ را به دست می‌دهد که stationary limit surface

$$(r - GM)^2 = G^2M^2 - a^2 \cos^2\theta \tag{16}$$

در حالی که افق خارجی در رابطه $(r_+ - GM)^2 = G^2M^2 - a^2$ صدق می‌کند.

در نتیجه ناحیه بین افق خارجی و سطح stationary وجود دارد که به آن ergosphere می‌گویند.




در داخل ergosphere در جهت چرخش سیاهچاله حرکت می‌کنند و می‌توانند وارد سیاهچاله شوند

و یا از ergos خارج شوند. پس از رسم نمودار پنروز باید تکینگی آن را بررسی کنیم.

$R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu}$ در $\rho = 0$، واگرا می‌شود در نتیجه تکینگی در نقطه‌ای رخ می‌دهد.

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta = 0 \qquad (17)$$

$$\boxed{r = 0 , \quad \theta = \frac{\pi}{2}} \qquad (18)$$

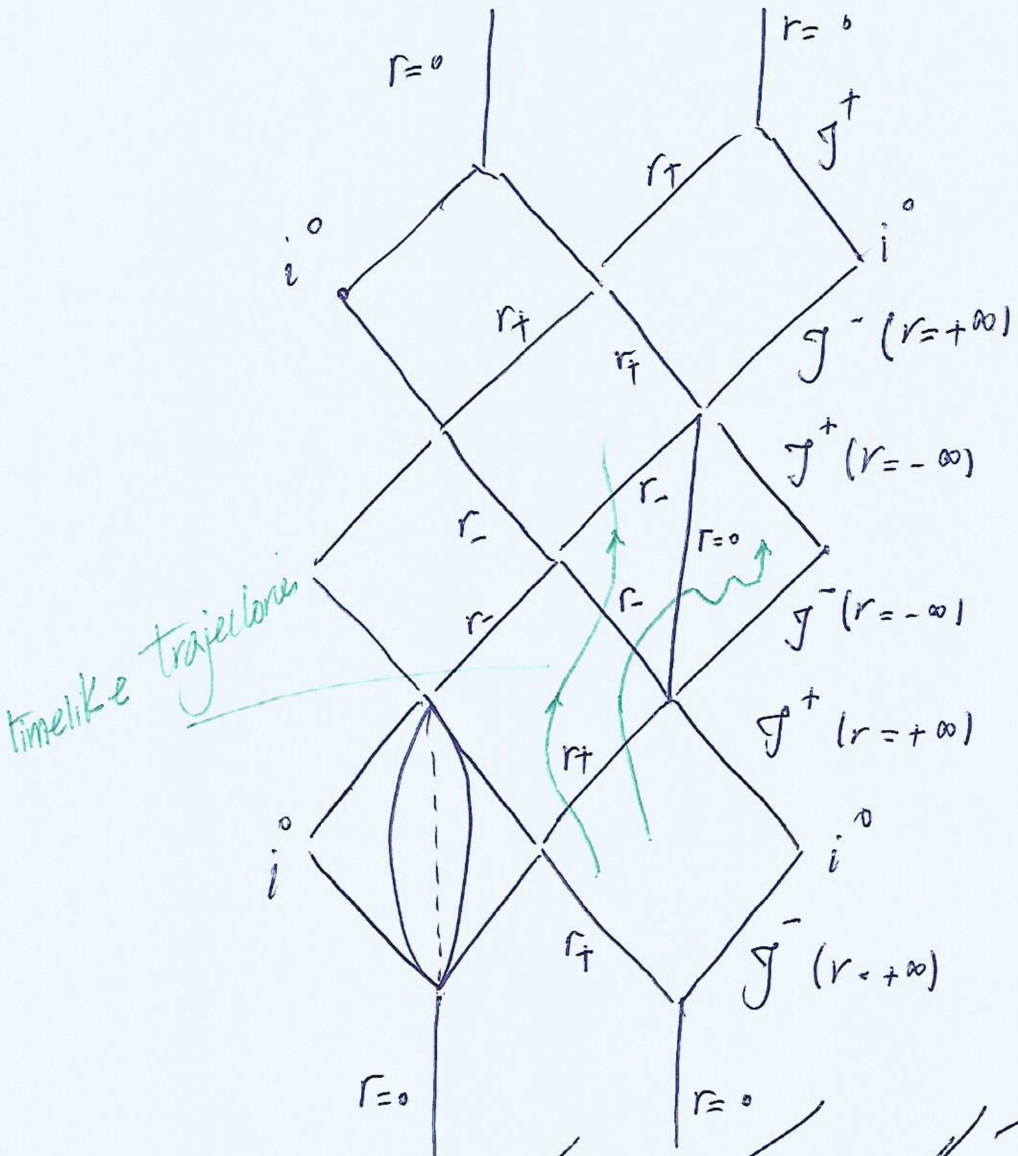
افق

نکته باید توجه داشته باشید که $r=0$ یک دیسک است و $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، مرز این دیسک است.

به یک معنا چرخش تکینگی ساختار شعاعی را لازم کرده و آن را بر روی یک دیسک پخش کرده است!

نمودار پنروز سیاهچاله کر را در شکل صفحه بعد ببینید.

نمودار پنروز سیاه‌چاله کر $G^2M^2 > a^2$




حال می‌توان از تکینگی $r=0$ عبور کرد در این قسمت می‌توان Closed timelike Curve درست کرد

در ادامه می‌خواهیم سرعت زاویه‌ای سیاه‌چاله را محاسبه کنیم.

ژئودزی null را در نظر بگیرید.

$$ds^2 = 0 = g_{tt}\, dt^2 + g_{t\phi}\,(dt\,d\phi + d\phi\,dt) + g_{\phi\phi}\, d\phi^2 \tag{19}$$

$$d\phi/dt = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \tag{20}$$

اگر افق لمسی را به روی از سطح stationary می‌سنجیم که $g_{tt} = 0$ در این صورت

$$(21) \quad g_{tt} = 0 \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \; , \quad \underbrace{\frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2G^2M^2 + a^2}}$$

$d\phi/dt$ هم علامت $a$ . چون هم جهت چرخش $a$ است (dragging of inertial frame)

ذرات بدار باید با سرعت کمتر از نور حرکت کنند

$$(22) \quad \Omega_H = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)(r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

□ افق کیلینگ :

در سیاه‌چاله شوارتزشیلد بردار کیلینگ $K = \partial_t$ از یک بردار زمان‌گونه به یک بردار فضاگونه بعد از افق تبدیل می‌شود. در حالت کلی اگر یک میدان برداری $X^\mu$ killing در یک از سطح پوچ، خود پوچ باشد، به این سطح $\Sigma$ افق کیلینگ $X^\mu$ گویند.

$X^\mu$ از نرمال به $\Sigma$ خواهد بود. علی‌الاصول افق کیلینگ با افق رویداد متفاوت است.

در زیر تقسیم‌بندی فوق را برای افق‌ها خواهیم داشت.

الف) هر افق رویداد $\Sigma$ در فضا-زمان stationary، مجانباً یک افق کیلینگ است برای میدان برداری $X^\mu$

ب) در صورتی که فضا زمان static باشد بردار کیلینگ $K^\mu = (\partial_t)^\mu$ خواهد بود.

ج) در صورتی که فضا-زمان static نباشد و محور تقارن محوری با بردار کیلینگ $R^\mu = (\partial_\phi)^\mu$ باشد. $X^\mu$ ترکیب خطی زیر را خواهد داشت

(23) $$X^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu$$

برای هر افق کیلینگ می‌توانیم یک گرانش سطحی surface gravity تعریف کنیم

در killing horizon بردار $X^\mu$ در معادله ژئودزیک زیر صدق می‌کند

(24) $$X^\mu \nabla_\mu X^\nu = -\underset{\text{surface Gravity.}}{\kappa} X^\nu$$

می‌توان نشان داد

(25) $$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu X_\nu)(\nabla^\mu X^\nu)\Big|_{\text{Horizon.}}$$

نکته توجه داشته باشید که بردار killing $K = \partial_t$ به نحوی

(26) $$K_\mu K^\mu (r \to \infty) = -1$$ بهنجار است

In a static, asymptotically flat space-time, the surface gravity is the acceleration of a static observer near the horizon, as measured by a static observer at infinity.

ناظر استاتیک، ناظری است که چاربردار سرعتش در راستای بردار کیلینگ $K^\mu$ باشد.

(27) $$K^\mu = V(x)\, U^\mu$$

از آنجایی که $U_\mu U^\mu = -1$ در نتیجه $V$ اندازه بردار کیلینگ است

(28) $$V = \sqrt{-K_\mu K^\mu}$$

$V$ را عامل انتقال به سرخ "redshift factor" می‌گویند. زیرا

انرژی وابسته به فوتون با چاربردار

(29) $$E = -P_\mu K^\mu$$

و فرکانسی که ناظر اندازه‌گیری می‌کند

(30) $$\omega = -P_\mu U^\mu$$

(31) $$\omega = E/V$$

درنتیجه طول موج را می‌توان بصورت زیر به دست آورد.

(32) $$\lambda_2 = \frac{V_2}{V_1}\lambda_1$$

در بی‌نهایت $V=1$ درنتیجه

(33) $$\lambda_\infty = \frac{\lambda_1}{V_1}$$

درنتیجه ۴ بردار شتاب را می‌توانیم بصورت زیر نوشت

(34) $$a^\mu = u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu , \qquad a_\mu = \nabla_\mu \ln V$$

اندازه شتاب برابر خواهد بود.

(35) $$a = \sqrt{a_\mu a^\mu} = V^{-1}\sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V}$$

درنتیجه گرانش سطحی را تعریف می‌کنیم

(36) $$\kappa = \underbrace{V}_{\text{Zero}}\underbrace{a}_{\text{infinity}} = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V}\,\Big|_{\text{Horizon}} = \text{finite}$$

نشان خواهیم داد که تعریف فوق با تعریف $\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu)$ برابر است.

حال در صورتی که ترکیب static نباشد از سطحی که $K^\mu K_\mu = 0$ به آن stationary limit surface می‌گویند (ergo surface).

در ناحیه ergosphere هیچ ناظری نمی‌تواند ساکن بماند زیرا $K^\mu$ فضاگونه است.

ولی رفتن به سمت افق سیاهچاله اجباری نیست. البته با توجه به روابط زیر انتقال به سرخ فضانوردی که به سطح ایستایی می‌رسد بی‌نهایت است.

$$V = \sqrt{-K_\mu K^\mu} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{V_2}{V_1}\lambda_1 \tag{37}$$

در نتیجه به این سطح infinite redshift surface گویند.

حال برای متریک شوارتزشیلد کمیت‌های مرتبط را محاسبه می‌کنیم.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{38}$$

بردار کیلینگ و چاربردار سرعت به صورت زیر است.

$$K^\mu = (1,0,0,0) \quad ; \quad U^\mu = \left[\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1/2},0,0,0\right] \tag{39}$$

در نتیجه عامل انتقال به سرخ برابر خواهد بود با

$$V = \sqrt{1-\frac{2GM}{r}} \tag{40}$$

شتاب از رابطه $a_\mu = \nabla_\mu \ln V$ محاسبه می‌شود در نتیجه

$$a_\mu = \frac{GM}{r^2\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}\underbrace{\nabla_\mu r}_{\delta^r_\mu} \tag{41}$$

در نتیجه اندازه شتاب برابر خواهد بود با

(42)
$$a = \frac{GM}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2}}$$

گرانش سطحی به صورت $Va$ در روی افق $r = 2GM$ محاسبه می‌شود در نتیجه

(43)
$$Va\Big|_{r=2GM} = \frac{GM}{r^2}\Big|_{r=2GM} \to K = \frac{1}{4GM}$$

در نتیجه گرانش سطحی شوارتزشیلد برابر $(4GM)^{-1}$ است.

این نتیجه در نگاه اول کمی حیرت‌انگیز است. زیرا با افزایش جرم، گرانش سطحی کوچکتر می‌شود.

البته این نتیجه صحیح است زیرا طبق رابطه $K = Va = \frac{GM}{r^2}\Big|_{r=2GM}$ با افزایش جرم، شعاع شوارتزشیلد که منجر است به افزایش $r$ باید، و این افزایش غالب است.

این نتیجه با گزاره‌ای که سیاهچاله‌های بزرگ نیروی کشندی کمتری دارند نیز سازگار است.