

امتحان پایان ترم کیهان شناسی - بهار ۹۶

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

هارشنبه ۷ تیر ۱۳۹۶ - ۱۵:۳۰ بعد از ظهر

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- مدت امتحان ۱۸۰ دقیقه است.
- امتحان شامل ۵ سوال است، لطفا هر سوال را در برگه مجزا جواب دهید: امتیازهای سوال ها به صورت زیر است:
سوال یک ۱۵ امتیاز، سوال دو ۱۵ امتیاز، سوال سه ۱۵ امتیاز، سوال چهار ۱۵ امتیاز و سوال پنج ۱۰ امتیاز دارد.
- کل سوالات ۷۰ نمره دارد. این امتحان نمره اضافی ندارد!
- پایان ترم ۷ نمره پایانی را تشکیل می دهد.
- دوشنبه ۱۲ تیر ساعت ۹ صبح در کلاس فیزیک ۳ مهلت ارائه پروژه ها در بازه زمانی ۲۰ دقیقه ای می باشد.

سوال ۱) تورم در کیهان اولیه به همراه یک میدان اسکالر

برای تولید تورم در کیهان اولیه می توان از یک میدان اسکالر با پتانسیل مناسب استفاده کرد. برای بررسی دینامیک این میدان می توان لاگرانژی میدان اسکالر ϕ را در فضا-زمان خمیده به صورت زیر نوشت:

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

که $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ دترمینان ماتریس است. در مسئله تورم و در حد زمینه، متریک را FRW به صورت زیر فرض می کنیم:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2$$

که $a = a(t)$ عامل مقیاس و سرعت نور را واحد $c = 1$ در نظر گرفته ایم.

الف) نشان دهید که در کیهان بدون اختلال (زمینه) لاگرانژی میدان اسکالر به صورت زیر خواهد شد:

$$L = a^3 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]$$

ب) سپس با استفاده از معادلات اویلر و لاگرانژ نشان دهید که دینامیک حاکم بر تحول میدان اسکالر در زمینه FRW به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

به این معادله، معادله کلاین و گوردن در کیهان FRW گویند.

ج) معادله کلاین گوردن فوق را با استفاده از رابطه پیوستگی برای میدان اسکالر $0 = \dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi)$ به دست آورید. توجه کنید که ρ_ϕ و P_ϕ به ترتیب چگالی و فشار میدان اسکالر می باشند.

د) در نزدیکی کمینه پتانسیل میدان اسکالر تورمی می توان پتانسیل را به صورت $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots$ تقریب زد. اکنون با یک حدس خردمندانه $ansatz$ که تعریف میدان کمکی χ به صورت زیر تعریف شده است. معادله کلاین - گوردن را به شکل زیر به دست آورید: (نقطه به معنی مشتق نسبت به زمان است.)

$$\ddot{\chi} + \left(m^2 - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 \right) \chi = 0 \quad \text{where} \quad \chi = a^{\frac{3}{2}}(t)\phi(t)$$

ه) حال فرض کنید که جرم اینفلاتون m در رابطه نامساوی روبرو صدق کند: $H^2 \sim \dot{H} \gg m^2$ دینامیک میدان اسکالر $\phi = \phi(t)$ را به دست آورید. سپس نشان دهید که میدان اسکالر در انتهای دوره تورم همانند ماده بدون فشار (غبار) رفتار می کند. راهنمایی: برای این که نشان دهید میدان اسکالر به صورت غبار رفتار می کند کافی است که نشان دهید $\rho_\phi \propto a^{-3}$

سوال ۲) اختلالات در کیهان شناسی

برای بررسی رشد اختلالات در کیهان می توانیم از معادلات حاکم در مکانیک سیالات و معادله پواسون استفاده کرد.

فرض کنید، شاره کیهانی دارای چگالی $\rho(\vec{x}, t)$ و فشار $P(\vec{x}, t)$ وابسته به مکان و زمان باشد که در کیهان تخت با عامل مقیاس $a = a(t)$ متحول می شود. معادلات پیوستگی، اوایلر و پواسون در مختصه فیزیکی (t, r) به ترتیب زیر است

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}_r \cdot (\rho \vec{u})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r \vec{u} \right) = -\vec{\nabla}_r P - \rho \vec{\nabla}_r \phi$$

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

که \vec{u} سرعت شاره و $\Phi(\vec{x}, t)$ پتانسیل گرانشی است.

الف) نشان دهید که معادله اوایلر را می توانید از پایستگی چگالی تکانه $\rho \vec{u}$ به دست آورد.

ب) معادلات فوق را درستگاه مختصات همراه بنویسید، برای این منظور ابتدا نشان دهید:

$$\vec{\nabla}_r = a^{-1} \vec{\nabla}_\chi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\chi - H \vec{\chi} \cdot \vec{\nabla}_\chi$$

که H پارامتر هابل و χ مختصه همراه است.

ج) با نوشتن چگالی، فشار و سرعت شاره به صورت اختلال حول زمینه به صورت زیر

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\vec{x}, t))$$

$$P(\vec{x}, t) = \bar{P}(t) + \delta P(\vec{x}, t)$$

$$\vec{u} = H\vec{r} + \vec{v}$$

که $\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\bar{\rho}(t)} - 1$ تباین چگالی و $\delta P(\vec{x}, t)$ ترم مرتبه اختلال در فشار است و \vec{v} سرعت خاصه است.

معادلات پیوستگی، اوایلر و پواسون را در زمینه و مرتبه یک اختلال به دست آورید.

توجه داشته باشید که برای راحتی در محاسبات اختلالی می توانید از مختصه همراه استفاده کنید.

د) در قدم بعد با استفاده از معادلات اختلالی پیوستگی، اوایلر و پواسون معادله حاکم بر تحول تباین چگالی را به صورت زیر به دست آورید: (که c_s سرعت سیال است).

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta = 4\pi G\bar{\rho}\delta$$

ه) حال فرض کنید که کیهان در دوره ماده تاریک غالب باشد، در این صورت نشان دهید که تباین چگالی متناسب با عامل مقیاس رشد خواهد کرد.

سوال ۳) فاصله سنجی در کیهان

در کیهان شناسی با چهار طول: ۱- همراه χ ۲ - فیزیکی r ۳- فاصله درخشندگی d_L و ۴- فاصله زاویه ای قطری d_A فاصله سنجی کردیم.

الف) با استفاده از تعریف درخشندگی L و شار F نشان دهید که ارتباط بین فاصله درخشندگی و طول همراه در کیهان تخت به صورت زیر است:

$$d_L = (1+z)\chi$$

ب) با استفاده از تعریف متریک فریدمن رابرتسون واکر به صورت زیر ارتباط بین فاصله زاویه ای قطری و طول همراه را به دست آورید:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\ell^2, \quad d\ell^2 = d\chi^2 + (f_K(\chi))^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

که $d\ell^2$ متریک قسمت فضایی است و $f_K = (1/\sqrt{-K}) \times \sinh(\sqrt{-K}\chi)$ برای کیهان بسته و باز به ترتیب برابر $+1$ و -1 می باشد برای کیهان تخت در حد $K \rightarrow 0$ متریک به دست خواهد آمد.

ج) برای هر یک از طول های درخشندگی و زاویه ای قطری یک مثال رصدی ارائه کنید، که در هر کدام طول تعریف شده برای فاصله سنجی استفاده شود.

د) برای کیهان با مدل استاندارد Λ CDM فاصله همراه، فاصله درخشندگی و فاصله زاویه ای قطری را برحسب انتقال به سرخ از صفر تا $z \sim 3$ را رسم کنید. (برای سادگی فرض کنید که کیهان در این قسمت از سوال تخت است).

ه) انتقال به سرخی را به دست آورید که از آن پس اجرام با دور شدن بزرگتر به نظر می رسند.

سوال ۴) مدل استاندارد کیهان شناسی

در این سوال قصد داریم به بررسی به مدل استاندارد کیهان شناسی بپردازیم که توانایی توجیه بیشتر رصد های کیهان شناسی دارد.

الف) مدل استاندارد کیهان شناسی با در نظر گرفتن تخت بودن قسمت فضایی آن ۶ پارامتر آزاد دارد. این ۶ پارامتر را نام برده و فیزیک آن را به صورت مختصر توضیح دهید.

ب) مقدار تقریبی هر یک از ۶ پارامتر کیهان شناسی را بنویسید.

ج) در کیهان تخت آیا پارامتر هابل در زمان حال H_0 پارامتر آزاد است؟ تحت چه شرایطی بحث کنید؟

د) مشاهدات کیهانی را به صورت کلی به دو دسته هندسی (اندازه گیری فواصل در کیهان) و دینامیکی (اندازه گیری رشد ساختارها) تقسیم می کنند. از هر دسته از مشاهدات یک نمونه را ذکر کنید و توضیح دهید که کدام یک از پارامترهای کیهان شناسی را با مشاهده پیشنهادی شما می توان مقید کرد.

ه) برای بررسی مدل های جایگزین مدل استاندارد کیهان شناسی می توان تعمیم این مدل ها (extensions) را بررسی کرد. به عنوان نمونه، افزودن " جرم نوترینوها" به عنوان پارامتر آزاد در مدل کیهان شناسی و بررسی آن با داده های رصدی را می توان نام برد..

در این راستا ۳ نمونه دیگر از تعمیم هایی که می توان برای مدل استاندارد در نظر گرفت را نوشته و شرح دهید؛ سپس مشخص کنید که چه رصد هایی می تواند این کمیت ها را مقید کند.

سوال ۵) چند سوال کوتاه و هیجان انگیز از کیهان شناسی

الف) آیا می توان نشان داد که هندسه قسمت فضایی کیهان حتما تخت (به معنا $k = 0$) است؟

ب) از برخورد دو خوشه کهکشانی (همانند مثال خوشه گلوله bullet cluster) چگونه و با چه رصد هایی از آن برخورد می توان پی به ماده تاریک برد؟

ج) طیف توان زاویه ای تابش زمینه کیهان را به صورت شکل واره (شماتیک) رسم کنید و هر قسمت آن را توضیح دهید.

د) چرا در کیهان شناسی از آمار دو نقطه ای مانند تابع دو نقطه ای یا طیف توان برای مشاهده پذیره ها استفاده می کنیم.

ه) چه ارتباطی بین طیف توان زاویه ای دما در تابش زمینه کیهان و طیف توان توزیع کهکشان ها در کیهان وجود دارد؟

با احترام

شانت باغرام