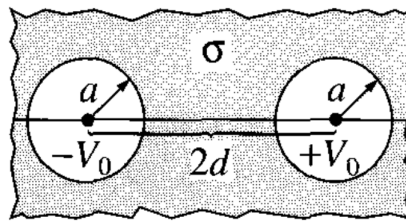


تمرین سری دوم الکترومغناطیس ۲ - بهار ۱۴۰۱

دکتر شانت باغرام

سوال ۱

دو لوله بلند و مستقیم مسی که شعاع هر کدام a است، به فاصله $2d$ از هم قرار گرفته اند. یکی از آن دو دارای پتانسیل V_0 و دیگری $-V_0$ است. فضای بین لوله ها با ماده ای به رسانش یکنواخت و ضعیف σ پر شده است. جریان بر واحد طولی که از یک لوله بر لوله دیگر میگذرد را بیابید. (شکل ۱)



شکل ۱: شکل سوال یک

سوال ۲

فرض کنید $J(r)$ نسبت به زمان ثابت است اما $\rho(\mathbf{r}, t)$ ثابت نیست. این شرایطی است که مثلاً در طول مدت شارژ یک خازن برقرار است.
الف) نشان دهید که چگالی بار در هر نقطه معین یک تابع خطی از زمان است.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)t \quad (1)$$

این یک پیکربندی الکترواستاتیکی نیست. با این وجود نسبتاً تعجب آور است که قانون کولن و قانون بیوساوار هر دو صادق اند و این را میتوانید با توجه به اینکه آنها در معادلات ماکسول صدق میکنند، تایید کنید.
ب) نشان دهید که

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} d\tau' \quad (2)$$

از قانون آمپر که دارای جمله جریان جابه جایی ماکسول است پیروی میکند.

سوال سوم

یک محیط با شرایط خاص زیر را تصور کنید:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \rho &= 0 \quad , \quad \vec{J} = g \vec{E} \end{aligned}$$

(الف)

از معادلات $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ و $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ استفاده کنید به معادله زیر برسید.

$$\nabla^2 E - \mu g \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

(ب)

حال از معادلات $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ استفاده کنید به معادله زیر برسید.

$$\nabla^2 B - \mu g \frac{\partial B}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

(ج)

نشان دهید جواب هر معادله به شکل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

را میتوان به شکل $u = f(x+y) + g(x-y)$ نوشت. (f و g دو تابع دلخواه هستند.) (راهنمایی: از تغییر متغیر $x' = x+y$ و $y' = x-y$ بهره ببرید و نشان دهید $\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} = 0$.)

سوال چهارم

از قانون پایستگی تکانه $\frac{dP_{mech}^i}{dt} = \int_v d^3x (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})$ شروع کنید و با استفاده از قوانین ماکسول چگالی جریان و چگالی بار الکتریکی را جایگذاری کنید و در نهایت به عبارت زیر برسید.

$$\frac{dP_{mech}^i}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_v g_i d^3x + \int_v d^3x \partial_j \Theta_{ij}$$
$$\Theta_{ij} := \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{8\pi} (B^2 + E^2) \delta_{ij}, \quad g_i := \frac{(E \times B)_i}{4\pi}$$