در الکتروستاتیک متوجه شدیم که $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ است در نتیجه می‌توان میدان الکتریکی را به صورت گرادیان میدان اسکالر توصیف کرد

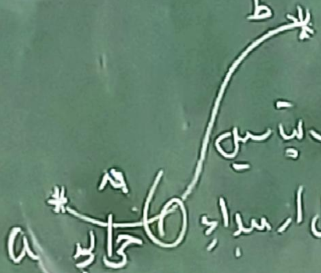
1/ $$\varphi(\vec{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\mathcal{O}$ = مبدأ مخصوص (اختیاری)

$$\varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \left(-\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}_a} \vec{E} \cdot d\vec{l}\right)$$

(−) حدود انتگرال تعویض می‌شوند

$$= -\left[\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\vec{r}_a}^{\mathcal{O}} \vec{E} \cdot d\vec{l}\right] = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



اختلاف پتانسیل مستقل از مبدأ

حساب

2/

Notation

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b (\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$: ایده نظریه اساسی حساب

Calculus

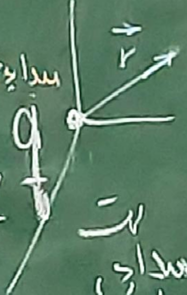
$b : \vec{r}_b$

$a : \vec{r}_a$ $\rightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ (الکتروستاتیک)

φ را برای پیکربندی دلخواه چگونه انتخاب کنیم؟

جواب: استفاده از ایده اصل برهم نهی (Superposition Principle)

مبدأ مختصات روی بار!



تک بار الکتریکی

انتخاب مبدأ: مهم

انتخاب مرجع صفر پتانسیل: مهم

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\overbrace{\hat{r}\cdot\underbrace{dr\,\hat{r}}_{\text{المان طول}}}^{1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3) فرض است که همانند گذشته حد پیوسته را در نظر خواهیم داشت

اگر n ذره، $q_1, q_2, \dots, q_n$ با مختصات $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_n'$ داشته باشیم:

پتانسیل آنها در نقطه $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

$$\varphi_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\mathscr{r}_i} \xrightarrow[\text{پیوسته}]{} \varphi_{tot}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{\mathscr{r}}$$

بستگی به r' دارد!

$$\vec{\mathscr{r}} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$$

$\vec{r}$: field point, $\vec{r}'$: source point

$$dq \to \underbrace{\rho\, d\tau}_{\text{چگالی حجمی}} \;\text{یا}\; \underbrace{\sigma\, da}_{\text{چگالی سطحی}} \;\text{یا}\; \underbrace{\lambda\, dl}_{\text{چگالی خطی}}$$

در نتیجه:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')\, d\tau'}{\mathscr{r}}}$$

4/

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

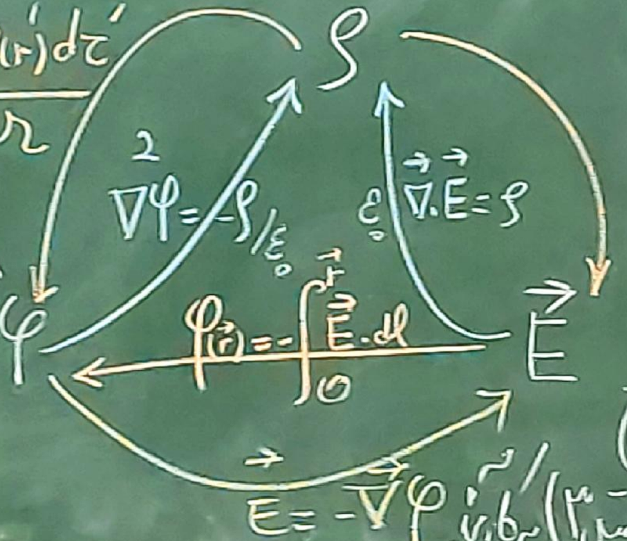
اکنون می‌توان داستان الکترواستاتیک را بر اساس ۳ کمیت ρ ، $\vec{E}$ و φ تکمیل کرد.

به طرح دایره زیر توجه کنید!

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')\,d\tau'}{r}$$

گرادیان

نسبت به کمیت



$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')\,d\tau'}{r^2}\hat{r}$$

اگر تقارن داشته باشیم

قانون گاوس مفید است. در غیر این

صورت معادله پواسون (موضوع فصل ۳) به کار برید.

یادآوری

Maxwell I

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$$

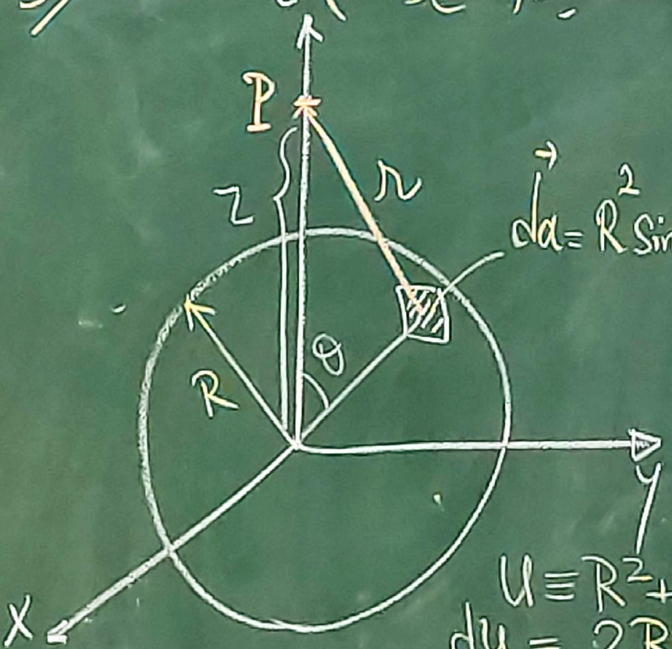
$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\varphi)=-\nabla^2\varphi=\rho/\varepsilon_0$$

5/

مثال: پوسته کروی (2D) با چگالی سطحی σ در نظر بگیرید. پتانسیل را در تمام فضا حساب کنید (شعاع پوسته R)

نقطه P (field point) در راستای محور z انتخاب شد.



$$d\vec{a} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

حل: از تعریف پتانسیل استفاده می‌کنیم

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta}} = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\;''\;}}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2Rz}\int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2}\frac{du}{u^{1/2}}$$

$$u \equiv R^2+z^2-2Rz\cos\theta$$

$$du = 2Rz\sin\theta\, d\theta$$

6/

$$q_{tot} = \sigma 4\pi R^2$$

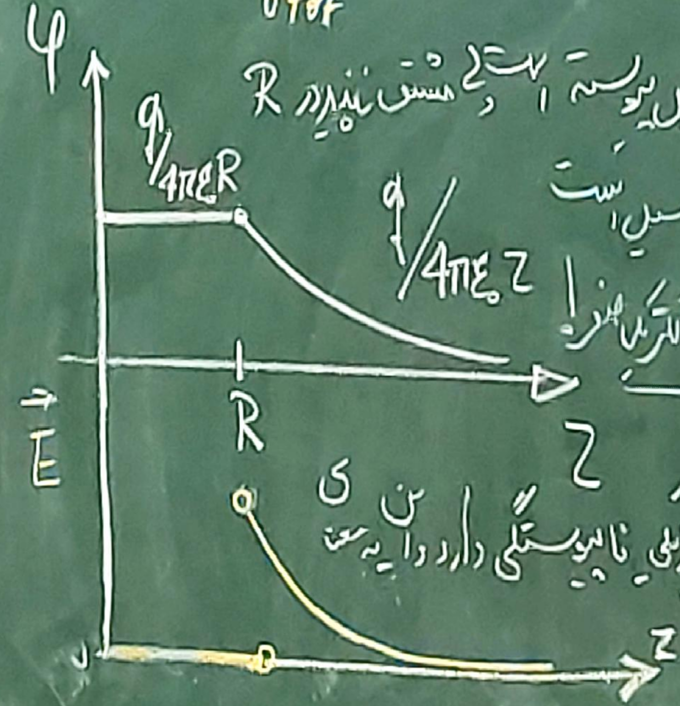
جواب:

a) اگر $Z>R$ باشد، $\varphi(z)=\dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 z}=\dfrac{q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 z}$

این جواب متناسب با z^{-1} است Δ پوسته شبیه بار نقطه‌ای است

b) اگر $Z<R$ باشد، $\varphi(z)=\dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

پتانسیل ثابت است، میدان الکتریکی صفر



پتانسیل پیوسته است، مشتق‌ناپذیر در R

سطح رسانا هم پتانسیل است

در داخل میدان الکتریکی صفر

میدان الکتریکی ناپیوستگی دارد و این به علت تجمع بار بر سطح پوسته است