

امتحان میان ترم دوم درس الکترومغناطیس ۱- پاییز ۱۴۰۰

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

دوشنبه ۲۲ آذر ۱۴۰۰

تاریخ بارگذاری: دوشنبه ۲۲ آذر ۱۴۰۰- ساعت ۱۰:۲۵

تاریخ تحویل امتحان: دوشنبه ۲۲ آذر ۱۴۰۰- ساعت ۱۲:۳۵

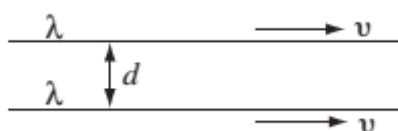
تاریخ تحویل امتحان در خانه: آدینه ۲۶ آذر ۱۴۰۰- ساعت ۲۳:۵۹

ارسال جواب: sh.baghran2@gmail.com

-
- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
 - مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه است.
 - امتحان کلاسی شامل ۳ سوال است. لطفا هر سوال را در برگه مجزا جواب دهید. امتیازهای سوال ها به صورت زیر است:
سوال یک ۱۰ امتیاز، سوال دو ۱۵ امتیاز، سوال سه ۲۰ امتیاز. از این امتحان حداکثر می توانید ۴۵ امتیاز کسب کنید.
 - امتحان در خانه شامل ۱ سوال ۱۰ امتیازی است. از امتحان در خانه می توانید حداکثر ۱۰ امتیاز کسب کنید.
 - کل سوالات ۵۵ نمره دارد. کسب ۵۰ نمره کفایت می کند.
 - میان ترم اول ۵ نمره پایانی را تشکیل می دهد.
 - جواب ها را لطفا اسکن و با فرمت pdf به آدرس sh.baghran2@gmail.com ارسال بفرمایید.
-

سوال ۱) سرعت مورد نیاز برای برابری نیروی مغناطیسی و الکتریکی!

دو خط بار بینهایت بلند با چگالی بار خطی λ با سرعت v در حال حرکتند. فاصله این دو سیم مطابق شکل d است.

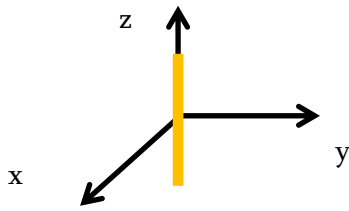


الف) سرعت v را به گونه ای به دست آورید که نیروی مغناطیسی جاذب برابر نیروی الکتریکی دافع باشد.

ب) مقادیر عددی کمیت ها را برای سرعت به دست آمده جایگذاری کنید. آیا سرعت به دست آمده معنادار است؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

سوال ۲) میدان حاصل از یک قطعه سیم و ممان های دوقطبی و چهارقطبی

قطعه ی کوچکی از یک سیم بر روی محور z مطابق شکل قرار دارد. به گونه ای که میانه ی آن در مرکز مختصات قرار دارد و بار Q را حمل می کند. چگالی بار خطی آن λ ویژگی زوج بودن را دارد. $\lambda(-z) = \lambda(z)$



جذر متوسط مربع بار (مقدار موثر) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\ell_0^2 = \frac{1}{Q} \int_{\text{wire}} z^2 \lambda(z) dz$$

الف) ممان دوقطبی و چهار قطبی توزیع بار این قطعه سیم را برحسب جذر متوسط مربع بار محاسبه کنید. راهنمایی از تعاریف زیر می توانید استفاده کنید. ρ چگالی بار و x'_i مختصه i ام بردار $\vec{r}'$ است.

$$p_i = \int d^3x' \rho(\vec{r}') x'_i$$

$$Q_{ij} = \int d^3x' \rho(\vec{r}') \left(3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\vec{r}'|^2 \right)$$

ب) پتانسیل الکتریکی $V(r, \theta)$ این توزیع بار را در فواصل دور از قطعه سیم تا مرتبه چهارقطبی به دست آورید.

سوال ۳) کره دی الکتریک با گذردهی متغیر!

کره دی الکتریکی به شعاع R در نظر بگیرید که گذردهی آن به صورت زیر تعریف می شود. ϵ_0 گذردهی خلا است.

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad r < R$$

این کره دی الکتریک بار آزاد ندارد و داخل میدان الکتریکی ثابت خارجی به صورت $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ در راستای z قرار دارد.

الف) نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند.

$$\nabla^2 V + \frac{d \ln \epsilon}{dr} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

ب) استدلال کنید که چرا پتانسیل الکتریکی را می توان به صورت زیر نوشت که $P_\ell(\cos \theta)$ چند جمله ای های لژاندرند.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0} V_\ell(r) P_\ell(\cos \theta)$$

ج) معادله دیفرانسیل حاکم بر V_ℓ را برای داخل و خارج دی الکتریک به دست آورید.

راهنمایی: در صورت نیاز از رابطه زیر می توانید استفاده کنید. همچنین حدس خردمندانه ی ansatz تابع توانی $V_\ell \propto r^p$ را استفاده کنید.

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_\ell(\cos \theta)}{d\theta} \right) = -\ell(\ell + 1) \sin \theta P_\ell(\cos \theta)$$

(د) با استفاده از شرایط مرزی مناسب پتانسیل را در تمام فضا به دست آورید. (راهنمایی: شرایط مرزی را در $r = 0, r = R, r \rightarrow \infty$ بررسی کنید).

سوال امتحان در خانه درس نامه موجود در لینک زیر از دیوید تانگ را با دقت بخوانید و خود درس نامه مختصری از مرتبه ۳-۴ صفحه از آن تهیه بفرمایید.

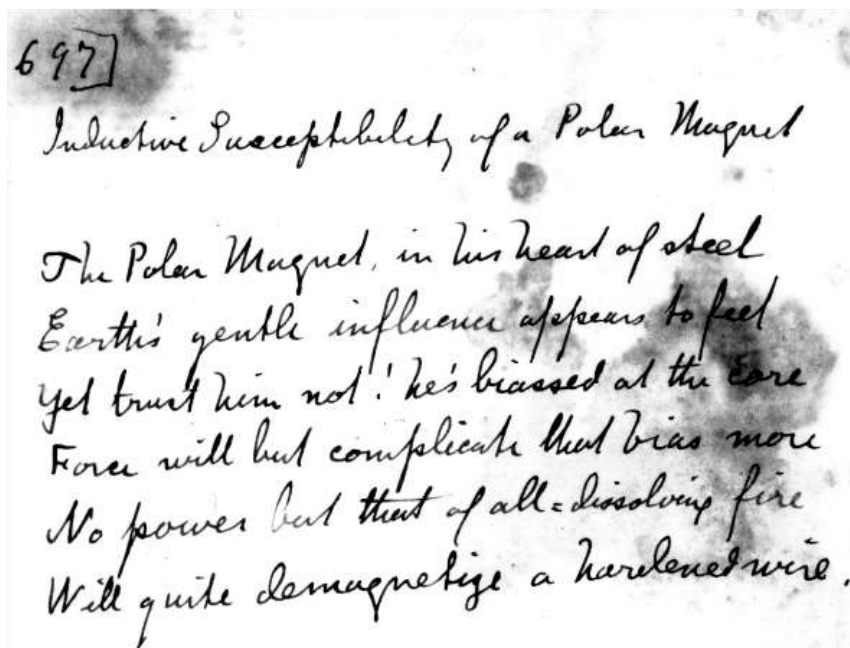
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/el2.pdf>

دستخط ماکسول برگرفته از وبگاه کتابخانه دانشگاه کمبریج

Poem of 1876 on inductive susceptibility in Maxwell's handwriting. (P84)

Photograph of six lines of verse in Maxwell's handwriting, concerning the inductive susceptibility of a polar magnet.

<https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PH-CAVENDISH-P-00084/1>



روابط مهم الکترومغناطیس در صورت نیاز

Index Notation:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i, \quad \vec{A} \times \vec{B}_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$

$$\det A = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1, i_1} A_{2, i_2} \dots A_{n, i_n}$$

Rotation of a Vector:

$$A'_i = R_{ij} A_j, \quad \text{Orthogonality: } R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \quad (R^T T = I)$$

$$\text{Rotation about } z\text{-axis by } \phi: R_z(\phi)_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} j=1 & j=2 & j=3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Rotation about axis $\hat{n}$ by ϕ :***

$$R(\hat{n}, \phi)_{ij} = \delta_{ij} \cos \phi + \hat{n}_i \hat{n}_j (1 - \cos \phi) - \epsilon_{ijk} \hat{n}_k \sin \phi.$$

Vector Calculus:

$$\text{Gradient: } (\vec{\nabla} \varphi)_i = \partial_i \varphi, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\text{Divergence: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \partial_i A_i$$

$$\text{Curl: } (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\text{Laplacian: } \nabla^2 \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$$

Fundamental Theorems of Vector Calculus:

$$\text{Gradient: } \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{\ell} = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a})$$

$$\text{Divergence: } \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

where S is the boundary of $\mathcal{V}$

$$\text{Curl: } \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

where P is the boundary of S

Coordinate Systems and Vector Derivatives Formula Sheet

Rectangular (Cartesian) Coordinates (x, y, z)

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$

Volume element: $d\tau = dx dy dz$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & \hat{x} &= \hat{r} \sin \theta \cos \phi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & \hat{y} &= \hat{r} \sin \theta \sin \phi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi \\ z &= r \cos \theta & \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \hat{r} &= \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \\ \theta &= \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) & \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) & \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \end{aligned}$$

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\phi$

Volume element: $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Cylindrical Coordinates (r, ϕ, z)

Relations to rectangular (Cartesian) coordinates and unit vectors:

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \phi & \hat{x} = \hat{r} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \\ y = r \sin \phi & \hat{y} = \hat{r} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi \\ z = z & \hat{z} = \hat{z} \\ \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} & \hat{r} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) & \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \\ z = z & \hat{z} = \hat{z} \end{array}$$

Line element: $d\vec{\ell} = \hat{r} dr + \hat{\phi} r d\phi + \hat{z} dz$

Volume element: $d\tau = r dr d\phi dz$

Gradient: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

Divergence: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Conductors:

Just outside, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$

Pressure on surface: $\frac{1}{2}\sigma|\vec{E}|_{\text{outside}}$

Two-conductor system with charges Q and $-Q$: $Q = CV$, $W = \frac{1}{2}CV^2$

N isolated conductors:

$$V_i = \sum_j P_{ij} Q_j, \quad P_{ij} = \text{elastance matrix, or reciprocal capacitance matrix}$$

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j, \quad C_{ij} = \text{capacitance matrix}$$

Image charge in sphere of radius a : Image of Q at R is $q = -\frac{a}{R}Q$, $r = \frac{a^2}{R}$

Separation of Variables for Laplace's Equation in Cartesian Coordinates:

$$V = \begin{Bmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cosh \gamma z \\ \sinh \gamma z \end{Bmatrix} \quad \text{where } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Separation of Variables for Laplace's Equation in Spherical Coordinates:

Traceless Symmetric Tensor expansion:

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 \varphi = 0,$$

where the angular part is given by

$$\nabla_\theta^2 \varphi \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla_\theta^2 C_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)} \hat{n}_{i_1} \hat{n}_{i_2} \dots \hat{n}_{i_\ell} = -\ell(\ell+1) C_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)} \hat{n}_{i_1} \hat{n}_{i_2} \dots \hat{n}_{i_\ell},$$

where $C_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)}$ is a symmetric traceless tensor and

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3.$$

General solution to Laplace's equation:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) C_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)} \hat{n}_{i_1} \hat{n}_{i_2} \dots \hat{n}_{i_\ell}, \quad \text{where } \vec{r} = r \hat{n}$$

Legendre Polynomial / Spherical Harmonic expansion:

General solution to Laplace's equation:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$$\text{Orthonormality: } \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}$$

Azimuthal Symmetry:

$$V(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Multipole Expansion:

First several terms:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{r}_i \hat{r}_j}{r^3} Q_{ij} + \dots \right] \quad , \text{ where}$$

$$Q = \int d^3x \rho(\vec{r}) \quad , \quad p_i = \int d^3x \rho(\vec{r}) x_i \quad Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{r}) (3x_i x_j - \delta_{ij} |\vec{r}|^2) \quad ,$$

$$\vec{E}_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}] - \frac{1}{3\epsilon_0} p_i \delta^3(\vec{r})$$

Legendre Polynomials:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Electric Fields in Matter:

Electric Dipoles:

$$\vec{p} = \int d^3x \rho(\vec{r}) \vec{r}$$

$$\rho_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_d) \text{ , where } \vec{r}_d = \text{position of dipole}$$

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (\text{force on a dipole})$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{torque on a dipole})$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Electrically Polarizable Materials:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \text{polarization} = \text{electric dipole moment per unit volume}$$

$$\rho_{\text{bound}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \text{ , } \sigma_{\text{bound}} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ , } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{free}} \text{ , } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ (for statics)}$$

Boundary conditions:

$$E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad D_{\text{above}}^{\perp} - D_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_{\text{free}}$$

$$\vec{E}_{\text{above}}^{\parallel} - \vec{E}_{\text{below}}^{\parallel} = 0 \quad \vec{D}_{\text{above}}^{\parallel} - \vec{D}_{\text{below}}^{\parallel} = \vec{P}_{\text{above}}^{\parallel} - \vec{P}_{\text{below}}^{\parallel}$$

Linear Dielectrics:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \text{ , } \chi_e = \text{electric susceptibility}$$

$$\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e) = \text{permittivity} \text{ , } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e = \text{relative permittivity, or dielectric constant}$$

$$\text{Clausius-Mossotti equation: } \chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \text{ , where } N = \text{number density of atoms}$$

$$\text{or (nonpolar) molecules, } \alpha = \text{atomic/molecular polarizability } (\vec{P} = \alpha \vec{E})$$

$$\text{Energy: } W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3x \quad (\text{linear materials only})$$

Force on a dielectric: $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ (Even if one or more potential differences are held fixed, the force can be found by computing the gradient with the total charge on each conductor fixed.)

Magnetostatics:

Magnetic Force:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ , } \text{ where } \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \text{ , } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = \int \vec{J} \times \vec{B} d^3x$$

Current Density:

$$\text{Current through a surface } S: I_S = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{Charge conservation: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

$$\text{Moving density of charge: } \vec{J} = \rho \vec{v}$$

Biot-Savart Law:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3x \end{aligned}$$

where μ_0 = permeability of free space $\equiv 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²

Examples:

$$\text{Infinitely long straight wire: } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

$$\text{Infinitely long tightly wound solenoid: } \vec{B} = \mu_0 n I_0 \hat{z}, \text{ where } n = \text{turns per unit length}$$

$$\text{Loop of current on axis: } \vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\text{Infinite current sheet: } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}, \hat{n} = \text{unit normal toward } \vec{r}$$

Vector Potential:

$$\vec{A}(\vec{r})_{\text{coul}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x', \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\text{coul}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Subject to modification if magnetic monopoles are discovered)}$$

$$\text{Gauge Transformations: } \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) \text{ for any } \Lambda(\vec{r}). \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ is unchanged.}$$

Ampère's Law:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \text{ or equivalently } \int_P \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Delta Functions:

$$\int \varphi(x) \delta(x - x') dx = \varphi(x'), \quad \int \varphi(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3x = \varphi(\vec{r}')$$

$$\int \varphi(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x') dx = - \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x'}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad g(x_i) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = -\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\partial_i \left(\frac{\hat{r}_j}{r^2} \right) \equiv \partial_i \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = -\partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\delta_{ij} - 3\hat{r}_i \hat{r}_j}{r^3} + \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^3(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{3(\vec{d} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{d}}{r^3} = -\frac{8\pi}{3} (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \delta^3(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{3(\vec{d} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{d}}{r^3} = -\frac{4\pi}{3} \vec{d} \times \vec{\nabla} \delta^3(\vec{r})$$

Electrostatics:

$$\vec{F} = q\vec{E}, \text{ where}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}') q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') d^3x'$$

$$\epsilon_0 = \text{permittivity of free space} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Poisson's Eq.)}, \quad \rho = 0 \implies \nabla^2 V = 0 \text{ (Laplace's Eq.)}$$

Laplacian Mean Value Theorem (no generally accepted name): If $\nabla^2 V = 0$, then the average value of V on a spherical surface equals its value at the center.

Energy:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x d^3x' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\vec{E}|^2 d^3x$$