



الکترومغناطیس ۱

پاییز ۱۴۰۰
استاد: دکتر شانت باگرام

سؤال اول

الف) نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم بسته به جریان I و شکل دلخواه را توسط میدان مغناطیسی موجود در فضا $\vec{B}(\vec{r})$ به دست آورید. مرکز سیم بسته در مکان \vec{r} است. ابعاد سیم از طول مشخصه تغییر میدان بسیار کوچک تر است بنابراین در محاسبه نیرو میدان مغناطیسی را حول مرکز سیم تا مرتبه اول جابه‌جایی مطابق رابطه زیر در نظر بگیرید و از جمله آخر که شامل جملات مرتبه بالاتر از ۲ است صرف نظر کنید:

$$\vec{B}_i(\vec{r}) = \vec{B}_i(\vec{r}.) + [(\vec{r} - \vec{r}.) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}_i + O(|\vec{r} - \vec{r}.|^2)$$

و به رابطه زیر که در آن \vec{m} گشتاور دوقطبی حلقه است، برسید:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

ب) حال برای همین حلقه گشتاور نیروی مغناطیسی وارده بر حلقه حول مرکزش را (فرمول زیر) با تقریب مرتبه صفرم میدان (یعنی میدان $\vec{B}(\vec{r}.)$ ثابت باشد) به دست آورید.

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r}.)$$

سؤال دوم

کراهی با پذیرفتاری مغناطیسی χ و شعاع R در نظر بگیرید.
الف) آن را در میدان خارجی یکنواخت \vec{B} قرار می‌دهیم. میدان نهایی را در کل فضا بیابید.
ب) در مرکز آن یک دوقطبی ایده‌آل \vec{m} قرار می‌دهیم. میدان را در کل فضا بیابید.

سؤال سوم

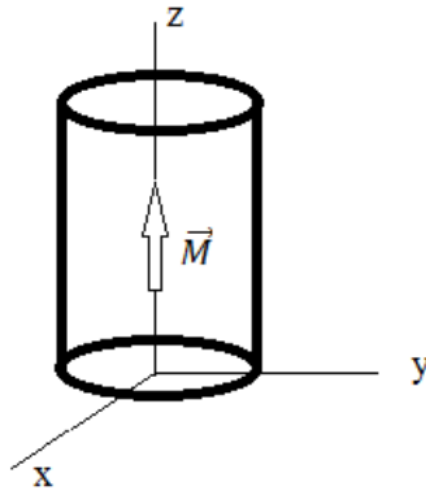
یک ماده مغناطیسی استوانه‌ای شکل به طول l و شعاع a داریم. استوانه دارای مغناطش دائمی یکنواخت \vec{M} در راستای محورش است.

الف) چگالی جریان‌های مغناطیسی حجمی (\vec{J}_M) و سطحی (\vec{j}_M) را به دست آورید.
ب) چگالی قطب مغناطیسی حجمی (ρ_M) و سطحی (σ_M) را به دست آورید.
ج) میدان مغناطیسی (\vec{B}) و شدت مغناطیسی (\vec{H}) را در تمام نقاط روی محور استوانه، در داخل و بیرون آن به دست آورید.

د) نسبت‌های $\frac{|\vec{H}|}{M}$ و $\frac{|\vec{B}|}{\mu_0 M}$ روی محور استوانه را برحسب Z در حالت $\frac{l}{a} = 5$ رسم کنید.

ه) فرض کنید $1 \ll \frac{a}{l}$ است و این استوانه را خیلی نزدیک به یک صفحه تخت بی‌نهایت با تراوایی خیلی بزرگ‌تر از μ_0 قرار داده‌ایم. نشان دهید نیروی وارد بر استوانه تقریباً برابر است با:

$$F \approx \frac{\mu_0}{4} \pi a^2 M^2$$



شکل ۱: شکل سؤال چهار

راهنمایی: به جای صفحه بی نهایت، از روش تصویر معادل آن را در نظر بگیرید. از طرفی می توان نشان داد که نیروی وارد بر یک جسم با مغناطش \vec{M} در میدان خارجی \vec{B} برابر است با:

$$\vec{F} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{M}) \vec{B} dv + \int_S (\hat{n} \cdot \vec{M}) \vec{B} da$$

سؤال چهارم

سیم بی نهایتی داریم با شعاع a و تراوایی μ که چگالی جریان $\vec{j} = j \cdot \hat{z} = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2}$ را از خودش عبور می دهد. (الف) مغناطش القایی \vec{M} و جریان حجمی و سطحی مغناطیسی سیم را وقتی که تحت اثر میدان خارجی یکنواخت $\vec{B} = B \cdot \hat{x}$ قرار می گیرید محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید که نیروی لورنتس برابر $\vec{F} = \int d^3r \vec{j} \times \vec{B} = I \cdot B \cdot \hat{y}$ است، که در آن \vec{j} چگالی جریان کل و \vec{B} میدان مغناطیسی کل است. راهنمایی: مولفه سطحی نیروی لورنتس که با انتگرال فوق محاسبه می شود را نیز باید در نظر بگیرید.

سؤال پنجم (امتیازی)

یک دوقطبی مغناطیسی در مرکز یک پوسته کروی ابررسانا قرار دارد. خاصیت ابررسانا آن است که میدان مغناطیسی درون آن صفر است. به این ترتیب، یک جریان سطحی روی سطح داخلی پوسته ابررسانا ایجاد می شود تا میدان مغناطیسی درون ابررسانا صفر شود. این جریان سطحی یک میدان مغناطیسی یکنواخت (علاوه بر میدان دوقطبی) درون کره ایجاد می کند. فرض کنید مقدار دوقطبی مغناطیسی m و جهت آن \hat{z} باشد. شعاع کره a است. میدان مغناطیسی حاصل از جریان سطحی نیز در راستای z است.

(الف) شرایط مرزی میدان مغناطیسی کل در $r = a$ را بر حسب جریان سطحی به دست آورید.

(ب) میدان مغناطیسی حاصل از دوقطبی مغناطیسی را به دست آورید.

(ج) میدان مغناطیسی یکنواخت حاصل از جریان سطحی را حساب کنید.

(د) نیروی وارد بر نیم کره شمالی ابررسانا (نیم کره $z > 0$) را به دست آورید.