



الکترومغناطیس ۱

پاییز ۱۴۰۰

استاد: دکتر شانت باغرام

سؤال ۱

اتحادهای زیر را با استفاده از قضایای گرادیان، دیورژانس و تاو اثبات کنید.
الف) (راهنمایی: در قضیه دیورژانس قرار دهید $v = cT$ که در آن c یک ثابت است.)

$$\int_V (\nabla T) d\tau = \oint_S T da$$

ب) (راهنمایی: به جای v در قضیه دیورژانس قرار دهید $(v \times c)$)

$$\int_V (\nabla \times v) d\tau = - \oint_S v \times da$$

ج) (راهنمایی: در قضیه دیورژانس قرار دهید $v = T \nabla U$)

$$\int_V [T \nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] d\tau = \oint_S (T \nabla U) \cdot da$$

د) (راهنمایی: به این معادله را قضیه گرین می‌گویند و خود از معادله ج) بدست می‌آید.)

$$\int_V [T \nabla^2 U - U (\nabla^2 T)] d\tau = \oint_S (T \nabla U - U \nabla T) \cdot da$$

ه) (راهنمایی: در قضیه استوکس $v = cT$ قرار دهید.)

$$\int_S \nabla T \times da = - \oint_P T dl$$

سؤال ۲

الف) با استفاده از قضیه استوکس $\int da \cdot (\nabla \times A) = \oint dl \cdot A$ درستی سمت چپ عبارت زیر را نشان دهید. (راهنمایی: قرار دهید $A = c \times F$ که در آن c یک بردار ثابت دلخواه است.)

$$\oint_C dl \times F = \int da [\hat{n}_i \nabla F_i - \hat{n} (\nabla \cdot F)] = \int da (\hat{n} \times \nabla) \times F$$

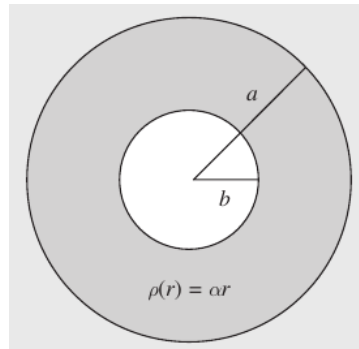
ب) درستی سمت راست معادله بالا را نشان دهید.

ج) نشان دهید:

$$\oint_C r \times dl = 2 \int_S da$$

سؤال ۳

میدان الکتریکی یک کره توپر با شعاع a و یک حفره کروی هم‌مرکز با شعاع b را در تمام فضا محاسبه کنید. چگالی بار روی کره را $\rho(r) = \alpha r$ در نظر بگیرید. (دقت کنید که درون حفره باری وجود ندارد.) همچنین پیوستگی میدان را در فاصله‌های a و b از مرکز بررسی کنید. حتماً میدان را در تمام فضا به دست آورید (درون حفره، روی گوشته و بیرون کره).



شکل ۱: شکل سؤال ۳

سؤال ۴

در این مسئله می‌خواهیم خطای حاصل از پیوسته در نظر گرفتن بار الکتریکی را به دست آوریم. برای سادگی یک توزیع بار خطی و نیم‌دایره‌ای را در نظر می‌گیریم. ابتدا توزیع بار روی آن را پیوسته، و سپس گسسته در نظر می‌گیریم. در هر مرتبه میدان الکتریکی را به دست آورده و خطای نسبی آن را اندازه می‌گیریم.

الف) یک نیم‌دایره را که توزیع بار خطی λ روی آن به صورت یکنواخت قرار گرفته است، در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در مرکز نیم‌دایره حساب کنید. (شعاع نیم‌دایره را R در نظر بگیرید.)

ب) حال توزیع بار را گسسته بگیرید و برای سادگی توزیع بار گسسته را الکترون‌هایی با بار e فرض کنید که در فاصله a از هم روی نیم‌دایره قرار دارند. میدان الکتریکی در این حالت در مرکز نیم‌دایره چه قدر است؟

ج) عبارتی برای خطای نسبی اندازه میدان الکتریکی به دست آورید. (تا مرتبه اول نسبت به $\frac{a}{R}$)

مقادیر a و R را خودتان به طور مناسب نسبت به اعداد واقعی انتخاب کنید و مقدار عددی خطای نسبی ناشی از گسستگی بارها را گزارش دهید.

راهنمایی: می‌دانیم

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{2 \sin\left(\frac{N+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{N}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$