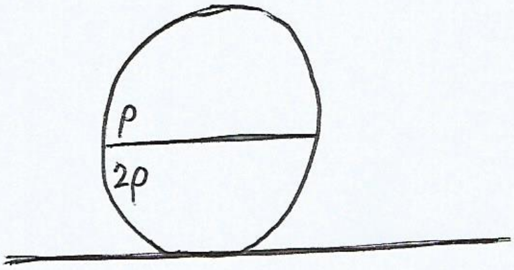
جسم صلب

- دیسکی به شعاع R در نظر بگیرید که چگالی آن یکنواخت نیست و توزیع مانند شکل زیر دارد.

سؤال این است که می‌خواهیم حرکت این جسم را بررسی کنیم.

برای حل این مسئله می‌توان لاگرانژی این جسم را در دستگاه ثابت بنویسیم $\mathcal{L} = T - U$



در جسم صلب $\quad \vec{v}_\alpha = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$

سرعت هر ذره در دستگاه ثابت — سرعت انتقال مبدأ دستگاه چرخان

در نتیجه انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{V} \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right) + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right)^2$$

با توجه به عبارت بالا به نظر می‌رسد که برای بررسی حرکت جسم صلب آیا باید دستگاه چرخان را روی نقطه ثابت (pivot Point $V=0$) گذاشت یا مرکز جرم CM (Center of Mass)

اگر دستگاه چرخان بر روی نقطه ثابت گذاشته شود.

$$T \to T_{pivot} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right)^2$$

اگر مبدأ دستگاه چرخان بر روی مرکز جرم باشد آنگاه ترم دوم

ترم دوم: $\quad \sum_\alpha m_\alpha \vec{V} \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \right) = \vec{V} \cdot \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}_{M R_{CM} = 0}$

توقف مرکز جرم و از آن جایی که مبدأ دستگاه مختصات چرخان روی مرکز جرم است $M R_{CM} = 0$

پس اگر مرکز دستگاه چرخان را بر روی مرکز جرم قرار دهیم.

$$T = T_{rot} + T_{translation}$$

$$\begin{cases} T_{trans} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \\ T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \end{cases}$$

انرژی جنبشی چرخشی را می‌توان برحسب تانسور ممان لختی نوشت.

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k} x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

که در حالت پیوسته

$$I_{ij} = \int_{V} \rho \, dv \left(\delta_{ij} \sum_{k} x_k^2 - x_i x_j \right)$$

و انرژی جنبشی چرخشی برابر است با

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} w_i w_j$$

حال برای سادگی تانسور ممان لختی را نسبت به مرکز هندسی $(0,0)$ دستگاه ثابت حساب می‌کنیم

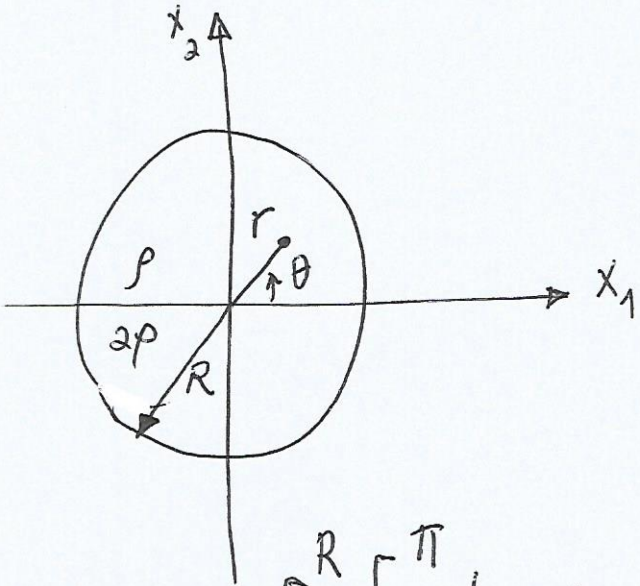
سپس با استفاده از قضیه محورهای موازی (Steiner's Parallel axis) انرژی جنبشی را در مرکز جرم بدست می‌آوریم.

مرکز جرم برابر است با

$$(0, \bar{x}_2)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{M} \int_{lower-panel} 2\rho \, x_2 \, dx_1 dx_2 + \int_{upper-pane} \rho \, x_2 \, dx_1 dx_2$$

حال با استفاده از دستگاه قطبی



$$\bar{x}_2 = \frac{\rho}{M}\left[\int_0^R \int_0^\pi (r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta + 2\int_0^R \int_\pi^{2\pi} (r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta\right.$$

$$= -2\frac{\rho R^3}{M} \qquad (1)$$

از طرفی $M = \rho\frac{1}{2}\pi R^2 + 2\rho\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{3}{2}\rho\pi R^2 \qquad (۲)$

$$\xrightarrow{(1),\,(۲)} \qquad \bar{x}_2 = -\frac{4}{9\pi}R$$

حال همان نحی را حول مرکز هندسی محاسبه می‌کنیم

$$I_{33} = \int \rho\, dv \Big[\underset{=1}{\delta_{33}}\big(\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{r^2} + x_3^2\big) - x_3^2\Big]$$

$$= \rho\Big[\int_0^R \int_0^\pi r^2 (r\, dr\, d\theta) + 2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot (r\, dr\, d\theta)$$

$$= \frac{3}{4}\pi\rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

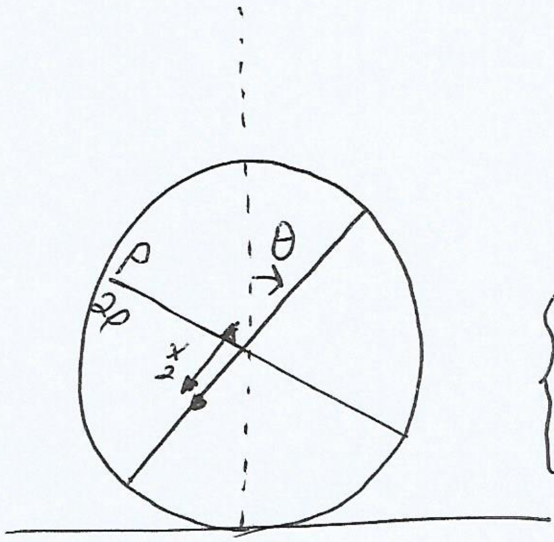
حال با استفاده از قضیه محورهای موازی

$$I_{ij} = J_{ij} - M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

$$I_{CM} = I_3 - M\bar{x}_2^2 = \frac{1}{2}MR^2 - M\frac{16}{81\pi^2}R^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\left[1 - \frac{32}{81\pi^2}\right]$$

حال باید سرعت انتقالی مرکز جرم را بدست آوریم.



$$\begin{cases} y_{CM} = R - |\bar{x}_2|\cos\theta \\ x_{CM} = R\theta - |\bar{x}_2|\sin\theta \end{cases}$$

نسبت به دستگاه ثابت

$$\dot{x}_{CM} = R\dot{\theta} - |\bar{x}_2|\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y}_{CM} = \dot{\theta}\,|\bar{x}_2|\sin\theta$$

$$\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 = V^2 = \dot{\theta}^2\underbrace{\left[R^2 + |\bar{x}_2|^2 - 2R|\bar{x}_2|\cos\theta\right]}_{\bar{r}^2}$$

$$\bar{r} = R\sqrt{1 + \frac{16}{81\pi^2} - \frac{8}{9\pi}\cos\theta}$$

در نتیجه

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left[\frac{\bar{r}^2}{R^2} + 1 - \frac{32}{81\pi^2}\right]$$

اردیبهشت ۹۴