

به نام خدا

تمرین سری هفتم درس کیهان شناسی

موعد تحویل: قبل از امتحان پایان ترم

از تمرین های سری شش و هفت کافی است یکی را تحویل بدهید و نمره ی تمرین دیگر به صورت امتیازی محاسبه می شود.

۱ دایره در مختصات ناقلیدسی

فضای سه بعدی با متریک زیر را در نظر بگیرید

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

که در آن R و K ثوابت هستند. K یکی از مقادیر 1 ، -1 و 0 را میگیرد و بازه θ و ϕ هم مطابق آنچه در مختصات کروی می دانیم تعریف می شوند. r مختصه شعاعی است که اگر $k=1$ باشد از صفر تا 1 تغییر می کند و در غیر این صورت از صفر تا بی نهایت.

یک دایره را در نظر بگیرید که با معادله زیر توصیف می شود

$$z = 0$$

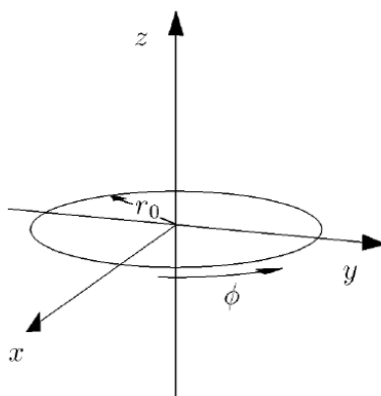
$$x^2 + y^2 = r_0^2$$

یا معادلات در مختصات کروی

$$r = r_0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

الف) محیط این دایره S را به دست آورید.



ب) شعاع دایره، ρ را به دست آورید. توجه کنید که ρ طول خطی است که از مبدا به محیط دایره ($r = r_0$) در مسیری با $\theta = \pi/2$ و با $\phi = \text{constant}$ می رسد.

ج) محیط S که در قسمت الف به دست آوردید را بر ρ حسب بنویسید. (برای جهان باز- بسته و تخت)

۲ حجم یک جهان بسته

حجم کل یک کیهان بسته که با متریک زیر توصیف می شود را پیدا کنید

$$ds^2 = R^2[d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

حجم کل را به حجم پوسته هایی از ψ تا $\psi + d\psi$ تقسیم کنید و سپس انتگرال گیری کنید.

۳

فضایی سه بعدی را با المان طول

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\omega^2$$

الف) فاصله شعاعی بین دو کره با $r = 2M$ و $r = 3M$ را محاسبه کنید.
ب) حجم فضایی بین دو کره قسمت الف را بدست آورید.

۴ روشنایی سطحی در جهان بسته

متریک فضا زمان برای یک کیهان همگن، همسانگرد و بسته با رابطه رابرتسون-واکر داده می شود

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

که ما $k=1$ میگیریم. برای بحث درباره حرکت شعاعی، بهتر است با یک مختصات شعاعی جایگزین که به صورت زیر تعریف می شود کار کنیم:

$$r = \sin \psi$$

بنابراین

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = d\psi$$

و متریک به صورت زیر ساده می شود

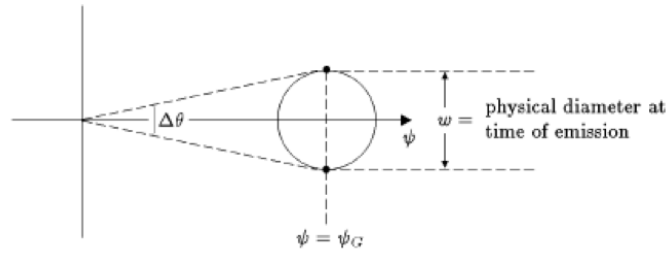
$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

فرم تابع a بستگی به محتوای ماده در کیهان دارد اما در این سوال شما باید فرض کنید $a(t)$ یک تابع دلخواه است. جواب نهایی را تا جای ممکن ساده کنید.

الف) فرض کنید زمین در مرکز چنین دستگاه مختصاتی است. و ما در حال رصد یک کهکشان کروی در مکان $\psi = \psi_G$ هستیم. نوری که از کهکشان میگیریم در زمان t_G گسیل شده و امروز در زمان t_0 دریافت می شود. در زمان گسیل این نور کهکشان توان تابشی P (انرژی تابشی کل بر واحد زمان) داشته است. همچنین می دانیم که این تابش همسانگرد بوده است. شار دریافتی از این کهکشان برای ناظر زمینی چقدر است؟ شار دریافتی انرژی دریافتی بر واحد زمان و بر واحد سطح تعریف می شود.

ب) فرض کنید قطر فیزیکی کهکشان در زمان t_G ، w بوده است. اندازه زاویه ای کهکشان $\delta\theta$ را از دید ناظر زمینی به دست آورید.

ج) روشنایی سطحی σ را برای کهکشان حساب کنید. روشنایی سطحی به صورت روشنایی بر واحد زاویه فضایی ای که کهکشان تحت آن دیده می شود، تعریف می شود.



۵ فواصل در کیهان باز

متریک فضا-زمان برای یک کیهان همگن و همسانگرد و باز با رابطه رابرتسون-واکر و به صورت زیر داده می شود:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

که $K=-1$ در نظر گرفتیم. مانند قسمت قبل (کیهان بسته) ابتدا تغییر متغیر مناسب را انجام داده و متریک را ساده کنید. و پس از آن برای پاسخ به پرستش های زیر، با در نظر گرفتن $a(t)$ به عنوان یک تابع دانسته جواب خود را بر حسب $a(t)$ بنویسید و ساده کنید:

الف) فرض کنید زمین در مرکز چنین دستگاه مختصاتی است ($\psi = 0$). و ما در حال دریافت یک پالس از یک کهکشان G در مکان $\psi = \psi_G$ هستیم. رابطه ای بنویسید که زمان گسیل پالس از کهکشان، t_G ، از آن به دست آید (برای حل کامل معادله باید $a(t)$ را بدانید).

ب) قرمزگرایی z_G نور رسیده از این کهکشان را بر حسب پارامترهای t_G ، ψ_G و دیگر پارامترهای داده شده به دست آورید.

ج) برای تخمین تعداد کهکشان هایی که می توانیم در یک محدوده قرمزگرایی خاص ببینیم باید حجم مربوط به ناحیه ای که این قرمزگرایی را می تواند داشته باشد را بدانیم. حجم ناحیه ای که قرمزگرایی کهکشان های آن از قرمزگرایی کهکشان G کم تر است بیابید. (احتمالا به انتگرالی می رسید که حل کردن آن مشکل است.)