

۱ تابع توزیع بوز-انیشترین و فرمی-دیراک

الف) نشان بدهید تعداد حالت هایی که N بوزون را می توان درون m طراز انرژی جای داد به صورت زیر است.

$$\Omega(E, N) = \frac{(N + m - 1)!}{N!(m - 1)!}$$

ب) با استفاده از تقریب استرلینگ این عبارت را ساده کنید و آن را برحسب عدد اشغال $n = N/m$ باز نویسی کنید . (تقریب استرلینگ : $\ln N! = N \ln N - N$)

ج) اگر m_E تبهگنی طراز انرژی با مقدار E و N_E تعداد ذرات در آن طراز باشد نشان دهید می توان برای آنتروپی مقدار زیر را بدست آورد. (آنتروپی $S = \ln \Omega_{total}$)

$$S = \sum_E [(n_E + 1) \ln(1 + n_E) - n_E \ln n_E] m_E$$

د) می دانیم که در حالت تعادل آنتروپی بیشینه است. با استفاده از روش ضرایب لانگرانژ و در نظر گرفتن ثابت بودن دو قید یعنی انرژی کل و تعداد کل ذرات ، n_E را به صورت زیر بدست آورید. (راهنمایی : وردش عبارت $S + \lambda_1 E_t + \lambda_2 N_t$ را در نظر بگیرید که در این عبارت $E_t = \sum N_E E$ و $N_t = \sum N_E$)

$$n_E = \frac{1}{\exp(\lambda_1 E - \lambda_2) - 1}$$

ه) با استفاده از رابطه ی بین آنتروپی ، دما و پتانسیل شیمیایی نشان دهید:

$$n_E = \frac{1}{\exp((E - \mu)/K_B T) - 1}$$

و) به تابع توزیع بالا ، بوز-انیشترین می گویند. با تکرار روند بالا برای فرمیون ها ، تابع توزیع فرمی دیراک را بدست آورید.

۲ افق هابلی

برای بدست آوردن هم بستگی های بزرگ مقیاس مشاهده شده در عالم ، دوره ای را نیاز داریم که در آن دوره ، افق هابلی کاهش یابد. این دوره از تاریخ کیهان می تواند به صورت تورم یا رمبش باشد. در این تمرین حالت های مختلف را بررسی می کنیم.

الف) حالتی را در نظر بگیرید که در آن ثابت هابل H_0 با گذر زمان ، عوض نشود. اگر داشته باشیم $a(t = 0) = 1$ تابعیت زمان را برای فاکتور مقیاس بدست آورید. اگر این کیهان تک مولفه ای باشد ، معادله حالت ماده تشکیل دهنده کیهان را بدست آورید.

ب) برای این حالت افق هابلی $r_H = \frac{1}{aH}$ را حساب کنید. آیا افق هابلی کاهش می یابد؟

ج) در ادامه حالتی را در نظر بگیرید که در آن داشته باشیم $a(t) = a_0 t^p$ که در این عبارت p ثابت است. ثابت هابل و افق هابلی را در زمان دلخواه بدست آورید.

د) اگر کیهان تک مولفه ای باشد، معادله حالت ماده تشکیل دهنده کیهان را بدست آورید.

ه) می خواهیم ببینیم در چه حالت هایی افق هابلی کاهش می یابد. برای چهار حالت $0 < p < 1$ ، $1 < p$ ، $-1 < p < 0$ و $p < -1$ نمودار افق هابلی را بر حسب زمان در بازه $-\infty < t < \infty$ رسم کنید.

و) در نمودارهای قسمت قبل، بخش های مجاز، را مشخص کنید و بگویید کدام یک از مدل ها (p های مختلف) می تواند جایگزین تورم فعلی باشد. مدل های جاگزین را برحسب این که دارای رمبش یا تورم هستند دسته بندی کنید.