

به نام خدا
تمرین سری نخست درس کیهان شناسی
موعد تحویل : شنبه ۲۶ فروردین ۱۳۹۶ قبل از کلاس

۱ لنز گرانشی

کهکشانی در فاصله D_s را در نظر بگیرید. یک ناحیه پرجرم و چگال از ماده تاریک به جرم M_L در فاصله D_L از ما، در مسیر نور این کهکشان قرار گرفته است. به طوری که جدایی زاویه ای آن با کهکشان از دید زمین زاویه کوچک β . به دلیل انحراف نور در میدان گرانشی ناحیه چگال ما تصویر کهکشان را در زاویه θ جدایی نسبت به عدسی گرانشی می بینیم. قصد داریم معادله تصویر کهکشان در آسمان را به دست آوریم. فرض کنید مسیر یک پرتوی نور که با پارامتر برخورد b از کنار جسم پر جرمی عبور می کند به اندازه زاویه $\phi = \frac{4GM_L}{bc^2}$ منحرف می شود. یک دستگاه مختصات قطبی مسطح بر روی صفحه آسمان قرار دهید، به شکلی که راستای اندازه گیری زاویه θ سمت خط واصل عدسی- چشمه باشد، این زاویه γ را بنامید. الف) نشان دهید معادله تصویر کهکشان، تابع γ بر حسب θ این گونه است:

$$\theta_E^4 = \theta^4 + \theta^3(-2\beta \cos(\gamma)) + \theta^2\beta^2$$

ب) در معادله قسمت قبل قرار دهید $\gamma = 0$ و نشان دهید داریم:

$$\theta_{\gamma=0} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2\right)}$$

- شعاع اینشتین θ_E با رابطه زیر تعریف می شود

$$\theta_E = \left[\frac{4GM_L}{c^2} \frac{D_s - D_L}{D_s D_L} \right]^{1/2}$$

۲

جهان تختی را با $a(t) = a_0 e^{xt}$ در نظر بگیرید. که در آن a_0 و χ ثابت هستند. الف) ثابت هابل را در زمان دلخواه t بیابید. ب) (x, y, z, t) یک نقطه از دستگاه مختصات همراه است. فرض کنید در زمان $t = 0$ از کهکشانی در مبدا مختصات فوتونی در راستای محور x ها گسیل می شود. $x(t)$ این پالس را بیابید. ج) فرض کنید که در کهکشانی در امتداد محور x ها زندگی می کنیم و در زمان t_r این پالس را دریافت می کنیم و با استفاده از آن قرمزگرایی z را اندازه گیری می کنیم. t_r را بر حسب z و χ و دیگر ثوابت مرتبط بیابید. د) در زمانی که نور دریافت شده است فاصله y فیزیکی ما از کهکشان مذکور چقدر است؟

۳ رمبش کروی

در نظریه استاندارد کیهان شناسی ، ماده تاریک سرد ، رمبش کروی انجام داده و هاله های ماده تاریک را تشکیل می دهد. در این مسئله می خواهیم یک مثال ساده از رمبش کروی ماده تاریک را بررسی کنیم. فرض کنید توده ای از ماده

تاریک با تقارن کروی در کیهان وجود داشته باشد (این تقارن در طول زمان به هم نمی خورد) و این توده از نظر گرانشی مستقل از نقاط دیگر جهان باشد. الف) پوسته ای کروی به شعاع r را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار جرم M داخل این پوسته وجود داشته باشد و در طول زمان و تحول پوسته مقدار آن ثابت بماند. با استفاده از معادله نیوتن بدست آورید:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = E$$

اگر داشته باشیم $E < 0$ این پوسته در نهایت رمبش انجام داده (در حالت مخالف پوسته تا بینهایت منبسط می شود). ب) نشان دهید که برای دینامیک شعاع پوسته ، معادله پارامتری زیر برقرار است:

$$r = A(1 - \cos(\theta)); \quad t = B(\theta - \sin(\theta))$$

A و B را بر حسب ثوابت مسئله بیابید. ج) زمان برگشت t_{turn} (زمانی که پوسته با ماکزیمم شعاع می رسد) همچنین شعاع ماکزیمم را بیابید.