

به نام خدا  
تمرین سری نخست درس کیهان شناسی  
موعد تحویل: دوشنبه ۱۶ اسفند ۱۳۹۵ قبل از امتحان میان ترم

## ۱ سرعت هابلی

فرض کنید در حالت کلی سرعت نسبی کهکشان ها در اثر انبساط عالم به صورت  $v = f(\vec{r}, t)$  باشد که دارای شرط همگنی به صورت زیر است (می دانیم که سرعت های هابلی شعاعی هستند):

$$f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) = f(\vec{r}_1, t) - f(\vec{r}_2, t)$$

نشان دهید تنها جواب  $f(\vec{r}, t)$  برابر  $H(t)\vec{r}$  است. هماهنگی که میبیند قانون هابل با شرط همگنی و همسانگردی کیهان سازگار است و اگر تابع  $f$  با هر توان دیگری از  $r$  متناسب بود این شرط برهم میخورد.

## ۲ مسئله محاسباتی

الف) جرم درون شعاع مداری خورشید به دور مرکز کهکشان راه شیری (۸ کیلوپارسک) تقریباً برابر با ۱۰۰ میلیارد جرم خورشید است (جرم خورشید  $2 \times 10^{30} kg$  است). حساب کنید چگالی میانگین درون این کره چند برابر چگالی میانگین ماده در کیهان است؟ (مقادیر فعلی پارامترهای کیهان شناختی را  $\Omega_m = \rho_{matter} / \rho_{crit} = 0.25$ ،  $H_0 = 70 km s^{-1} Mpc^{-1}$  در نظر بگیرید). نزدیک ۲/۳ این مقدار را باریون ها تشکیل می دهند. حساب کنید جرم درون مدار خورشید چند برابر جرم باریون در کیهان است. ( $\Omega_{baryon} \approx 0.044$ ) چرا ماده باریونی از ماده تاریک متمرکزتر است.

ب) مجموع ماده باریونی و ماده تاریک در کهکشان راه شیری برابر  $2 \times 10^{12}$  جرم خورشید است. نزدیک ترین همسایه کهکشانی ما، کهکشان آندرومدا (M31) در فاصله ۸۰۰ کیلوپارسکی از ما قرار دارد و جرمی مشابه جرم کهکشان ما دارد. این دو کهکشان تقریباً بیشتر جرم موجود در همسایگی شان را تشکیل می دهند. چگالی یک کره با شعاع ۱ مگاپارسک در اطراف ما چند برابر چگالی میانگین در کیهان است؟

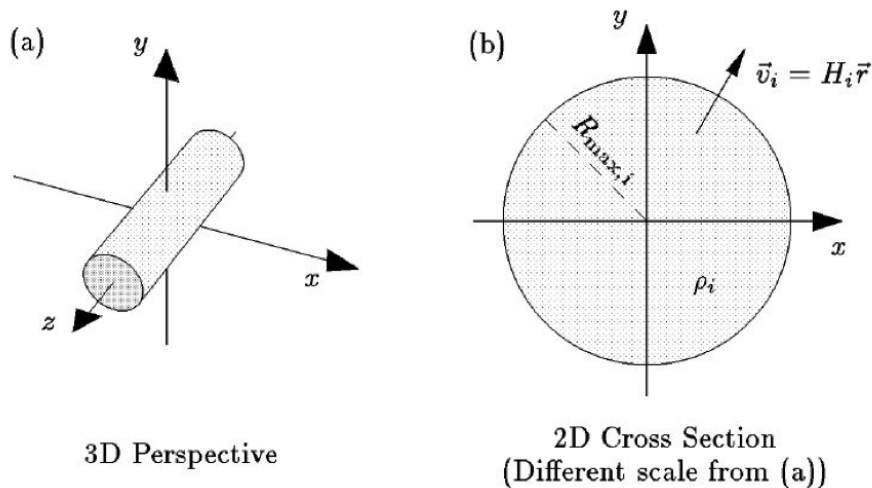
## ۳ پارادوکس اولبرز

فرض کنید که ستارگان با چگالی تعداد یکنواخت  $n$  در کیهان توزیع شده باشند و هر کدام دارای درخشندگی  $L$  باشند. ثابت کنید برای ناظری که در چنین کیهانی زندگی می کند مجموع روشنایی دریافتی از ستارگان تا فاصله  $r$  از ناظر، با  $r$  متناسب است و بنابراین اگر کیهان نامتناهی باشد روشنایی مجموع به بی نهایت می رسد.

## ۴ مدل کیهان استوانه ای

در این مسأله می خواهیم مدل "کیهان استوانه ای" را بررسی کنیم که در راستای  $x$  و  $y$  منبسط می شود ولی حرکتی در راستای  $z$  ندارد (راستای  $z$  راستای محور استوانه است). برای این کار کیهان را به جای یک کره، یک استوانه به طول بی نهایت و شعاع  $R_{max}$  در نظر می گیریم.

فرض کنید در زمان اولیه  $t_i$  چگالی اولیه این کیهان  $\rho_i$  باشد و سرعت حرکت یک ذره آزمون در شعاع  $r_i$  از محور استوانه از قانون هابل به فرم  $v_i = Hr_i$  محاسبه شود.



الف) با استفاده از قانون گاوس برای گرانش می توان نشان داد که شتاب گرانشی در هر نقطه از رابطه زیر به دست می آید.

$$g_i = -\frac{A\mu}{r} \hat{r}$$

که در آن  $A$  یک ثابت و  $\mu$  جرم واحد طول داخل شعاع  $r$  است. ثابت  $A$  را به دست آورید.  
 ب) مسیر یک ذره که در زمان اولیه  $t_i$  در مکان اولیه  $r_i$  بوده را با  $r(r_i, t)$  نمایش می دهیم.  $r(r_i, t)$  را بر حسب  $r$ ،  $r_i$ ،  $\rho_i$  و سایر ثوابت مربوطه بیابید.  
 ج) کمیت  $u$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(r_i, t) \equiv \frac{r(r_i, t)}{r_i}$$

نشان دهید که  $u(r_i, t)$  در واقع مستقل از  $r_i$  است. این به این معناست که کیهان استوانه ای ما به صورت همگن و یکنواخت منبسط می شود (درست مشابه کیهان کروی که در کلاس بررسی شد). پارامتر  $u$  را ضریب مقیاس می نامیم و با  $a(t)$  نمایش می دهیم.

د) چگالی جرمی  $\rho$  را بر حسب چگالی جرمی اولیه  $\rho_i$  و ضریب مقیاس  $a(t)$  به دست آورید. از نتیجه حاصل شده برای به دست آوردن  $a(t)$  بر حسب  $\rho$  و  $A$  سایر ثوابت مربوطه استفاده کنید.  
 ه) توصیفی برای کمیت پایسته  $E$  به فرم زیر بیابید. ( $E$  را به دست آورید)

$$E = \frac{1}{2} \dot{a}^2 + V(a)$$

تابعیت جمله پتانسیل بر حسب ضریب مقیاس  $V(a)$  چگونه است؟ آیا این کیهان برای همیشه انبساط می یابد یا سرانجام دچار رمبش می شود؟

## ۵ جهان انیشتین دسیتر

جهان انیشتین دسیتر جهانی است که فقط از ماده ی غیر نسبیتی با فشار صفر تشکیل شده باشد.  
 الف) در حالت کلی نشان دهید:

$$q(t) = \sum_i (1 + 3\varepsilon_i) \Omega_i$$

که در این عبارت  $\epsilon_i = \frac{1}{2} \frac{P}{\rho c^2}$  . در نتیجه برای جهان انیشتین دسیتر داریم.

$$q(t) = \frac{\Omega(t)}{2}$$

ب) تابع مقیاس  $a(t)$  را برای این جهان بدست آورید.  
 ج) فرض کنید چگالی جهان کاملاً همگن نباشد و به میزان کم از حالت همگن مختل شود. یعنی داشته باشیم:

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(x, t))$$

که در این رابطه  $\delta(x, t)$  را تباین چگالی می نامیم که عددی بزرگ تر از منفی یک است.  
 در آینده (دور یا نزدیک) خواهید دید (و شاید هم نخواهید دید) که تابع تباین چگالی در حالت اختلالی و جهان انیشتین دسیتر در معادلات زیر صدق می کند:

$$\delta'' + \frac{a'}{a} \delta' - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0$$

که در این عبارت مشتق پرایم نسبت به زمان همدیس (conformal) است.  
 ج) با استفاده از عبارت بالا  $\delta(x, t)$  را در جهان انیشتین دسیتر بر حسب  $\delta(x, t_0)$  بدست آورید.