

قانون دوم کپلر

دو سیاره در یک مدار بیضوی با دوره تناوب T نیم قطر بزرگ a و خروج از مرکز e ، هر دو به صورت پادساعتگرد در حال گردش به دور ستاره مرکزی منظومه‌شان هستند. در یک لحظه سیاره اول در اوج مدار بیضی و سیاره دوم در حضیض مدار قرار دارند. از این لحظه چقدر طول می‌کشد تا دو سیاره به فاصله یکسان از ستاره مرکزی برسند؟ (پاسخ بر حسب پارامترهای داده شده باشد)

تبعات قانون دوم کپلر

فرض کنید سیاره‌ای در مدار بیضوی شکل به دور ستاره‌ای با درخشندگی L در حال چرخش است. خطی فرضی را در نظر بگیرید که دو نقطه دلخواه از مدار را به هم وصل میکند و از ستاره مرکزی هم می‌گذرد و محیط بیضی را به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌کند. نشان دهید مستقل از اینکه این خط چگونه در نظر گرفته شود انرژی‌ای که سیاره در طول حرکت در این دو بخش از ستاره دریافت می‌کند برابر است.

انرژی مدار بیضوی

در یک مدار بیضوی نسبت کمینه سرعت به بیشینه سرعت سیاره‌ای که تحت گرانش ستاره مرکزی در حال دوران است را بر حسب پارامترهای هندسی مدار به دست آورید.

تشکیل ستاره

یکی از ناشناخته‌ترین فرایندهای اخترفیزیکی، مراحل تحول ستارگان پیش از رشته اصلی است. در کلامی ساده ابرهای عظیمی عموماً از هیدروژن خنثی و یا دیگر فرم‌های هیدروژن در محیط میان ستاره‌ای که پتانسیل رمبش برای تشکیل یک پیش‌ستاره را دارند، در یک سری مقیاس زمانی که رایج‌ترین آن‌ها مقیاس زمانی سقوط آزاد می‌باشد، رمبش می‌کنند و وارد مرحله تحولی پیش رشته اصلی می‌شوند. هدف ما در این مسأله بررسی چگونگی سقوط این ابرهای گازی عظیم برای تشکیل یک پیش‌ستاره است. همان‌طور که گفته شد معادلات پیشرفته هم در این مراحل با تقریب‌های فراوان شامل چشم‌پوشی از چرخش ابر اولیه، میدان‌های مغناطیسی، سرعت‌های شعاعی اولیه ابر، جزییات انتقال تابشی درون ابر، وجود دانه‌های غبار درون ابر و نیز در تبخیر آن‌ها، گسسته شدن مولکول‌ها و یونیزه شدن اتم‌ها و ... همراه است.

ابر کروی عظیمی با جرم M و شعاع اولیه R را در نظر بگیرید. این ابر عظیم دارای انرژی پتانسیل گرانشی U و انرژی جنبشی کل ذرات برابر K است. طبق قضیه ویریال در حالی که این سیستم گرانشی در حال تعادل قرار دارد داریم:

$$2K + U = 0$$

وقتی از اثرات چرخش، میدان مغناطیسی و آشفستگی درون سیستم چشم‌پوشی کنیم، این معادله در حقیقت مرز بین پایداری و ناپایداری سیستم را مشخص می‌کند و رهیافت ما برای یافتن شرایط سقوط این ابر خواهد بود.

الف) ابتدا نشان دهید که انرژی پتانسیل یا خود گرانشی یک جسم متقارن و یکنواخت کروی به همان جرم و شعاع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{-3GM^2}{5R}$$

ب) حال نشان دهید که انرژی جنبشی کل ذرات این جرم از رابطه زیر که در آن μ وزن مولکولی متوسط ذرات آن و T دمای متوسط ابر است به دست می آید:

$$K = 1.5 \frac{MkT}{\mu m_H}$$

پ) با توجه به توضیحات بالا و با استفاده از قضیه ویریال ثابت کنید که جرم یک ابر حداقل باید به مقدار زیر باشد تا بتواند برای تشکیل یک پیش ستاره برمید:

$$M_{Jeans} \approx \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن ρ_0 چگالی متوسط ابر اولیه است. به این جرم بحرانی جرم جینز می گویند.
 ت) حدی برای شعاع بحرانی ابر در حال رمبش بیابید (شعاع جینز).
 اگر فرض کنیم که هرگونه گرادیان فشار تاثیر بسیار کمی بر روی سقوط مواد ابر روی هم داشته باشد، می توان فرض کرد که ابر اصولاً در حال سقوط آزاد است. این سقوط آزاد تا مرحله ی آغاز پیش ستاره ادامه خواهد داشت (تا زمانی که جسم روی خطوط هایاشی قرار می گیرد) و از آن جا به بعد مرحله پیش رشته ی اصلی با مقیاس زمانی گرمایی (کلوین-هلمهولتز) ادامه خواهد یافت. همچنین فرض خواهیم کرد که فرایند سقوط تقریباً هم دما بوده و انرژی پتانسیل گرانشی آزاد شده ی ابر در حین سقوط (مادامی که عمق نوری ابر خیلی کم است) به طور موثر از آن خارج می شود.
 ث) ابتدا نشان دهید که برای یک المان جرم در فاصله r از مرکز ابر که تنها جرم درونی ابر تا آن فاصله $r(M)$ روی آن تاثیر گرانشی دارد، داریم

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} - \frac{P}{r}$$

می بینیم که اگر ابر در حال تعادل باشد سمت چپ معادله صفر خواهد بود و نتیجه، معادله معروف تعادل هیدرواستاتیک است. اما در این مسأله با توجه به فرضیاتی که توضیح دادیم می توان گفت:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_r}{r^2}$$

با توجه به این که جرم ابر در حین سقوط پایسته می ماند می توان نوشت:

$$M_r = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_0$$

با توجه به این معادلات و با انتگرال گیری در محدوده ی $r = r_0$ تا $r \approx 0$ نشان دهید که مدت زمان سقوط ابر یا به عبارت دیگر مدت زمان مقیاس زمانی سقوط آزاد از رابطه زیر به دست می آید:

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32} \frac{1}{G\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

این معادله هم چنین می تواند با روش های دیگری هم چون فرض سقوط ذرات ابر در مدارهای بیضوی کپلری به دست آید.