تمرین سری پنجم

مکانیک سماوی و تحول ستاره‌ها

تاریخ تحویل تا پایان روز چهارشنبه ۱۲ خرداد اتاق ۱۳۰

---

۱. فرض کنید سیاره ای در مدار بیضوی شکل بدور ستاره ای با درخشندگی L در حال چرخش است . خطی را فرض کنید که از دو نقطه ی محیط بیضی و ستاره مرکزی می گذرد . و محیط بیضی را به دو قسمت تقسیم می کند (دو قسمت الزاما با هم برابر نیستند !) نشان دهید مستقل از آنکه خط از کدام دو نقطه بگذرد ، کل انرژی که سیاره در یک بخش این خط از ستاره مرکزی دریافت می کند ، با انرژی که در سمت دیگر خط دریافت می کند برابر است.

---

۲. در یک مدار بیضوی نسبت کمینه سرعت به بیشینه سرعت را برحسب مشخصات مدار به‌دست آورید.

---

۳. اگر در مدار بیضوی زاویه بین بردار سرعت شعاعی و بردار سرعت مماسی را Y تعریف کنیم ، بیشینه مقدار Y در چه نقطه ای از مدار رخ می دهد؟

---

۴. یکی از ناشناخته‌ترین قسمت‌های اختر فیزیک مراحل تحول ستارگان پیش از پیش–رشته‌ی اصلی می‌باشد. در کلامی ساده ابرهای عظیمی از عموماً هیدروژن خنثی و یا دیگر فرم‌های هیدروژن در ISM، که پتانسیل سقوط برای تشکیل یک پیش‌ستاره (پروتو استار) را دارند، در یک سری مقیاس زمانی که رایج‌ترین آن‌ها در ابتدای تشکسل مقیاس زمانی سقوط آزاد می‌باشد، روی خود فرو می‌ریزند و وارد مرحله‌ی تحولی پیش–رشته‌ی اصلی می‌شوند. هدف ما در این مساله بررسی چگونگی سقوط این ابرهای گازی عطیک برای تشکیل یک پیش‌ستاره است. همان طور که گفته شده نه تنها معادلات ما در این‌جا، بلکه دیگر معادلات پیشرفته هم در این زمینه با تقریب‌های فراوان و نادیده گرفتم خیلی از فرآیندهای بعضاً موثر، مانندِ چرخش ابرهای اولیه، میدان‌های مغناطیسی، سرعت‌های شعاعی اولیه‌ی ابر، جزییات انتقال تابشی درون ابر، وجود دانه‌های غبار در ابر و نیز در تبخیر آن‌ها، گسسته شدن مولکول‌ها و یونیزه شدن اتم‌ها و ... همراه می‌باشد. اما با این وجود همین معادلات تقریبی بصیرت خوبی از این فرآیند به دست خواهند داد.

ابر کروی عظیمی با جرم M و شعاع اولیه‌ی R را در نظر بگیرید. این ابر عظمیم دارای انرژی پتانسیل گرانشی U انرژی جنبشی کل ذرات برابر با K است. طبق قضیه‌ی ویریال در حالتی که این سیستم گرانشی از ذرات در تعادل قرار دارد، داریم:

$$2K + U = 0$$

وقتی که از اثرات چرخش، میدان مغناطیسی و آشفتگی درون سیستم چشم‌پوشی کنیم، این معادله در حقیقت مرز بین پایداری و ناپایداری سیستم را مشخص می‌کند و رهیافت ما برای یافتن شرایط سقوط این ابر خواهد بود.

آ. ابتدا نشان دهید که انرژی پتانسیل یا خود گرانشیِ یک جسم متقارن و یکنواخت کروی به همان جرم و شعاع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

ب.حال نشان دهید که انرژی جنبشی کل ذرات این جرم از رابطه‌ی زیر که در آن μ وزن مولکولی متوسط ذراتِ آن و T دمای متوسط ابر است، به دست می‌آید:

$$K = 1.5\frac{MkT}{\mu m_H}$$

پ.با توجه به توضیحات بالا و با استفاده از قضیه‌ی ویریال ثابت کنید که جرم بک ابر خداقل باید به مقدار زیر باشند تا بتواند برای تشکیل یک پیش‌ستاره در خورد فرو بریزد:

$$M_{Jeans} \approx \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_\circ}\right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن $\rho_\circ$ چگالی متوسط اولیه‌ی ابر است. به این جرم بحرانی حد جرمِ جینز می‌گویند.

ت. حدی برای شعاع برحانی سقوط ابر بیابید. (که همان طبعاً همان شعاع جیز خواهد بود)

اگر فرض کنیم که هر گونه گرادیان فشار تاثیر بسیار کمی بر روی سقوط مواد ابر روی هم داشته باشد، می‌توان فرض کرد که ابر اصولاً در حال سقوط آزاد است. این سقوط آزاد تا مرحله‌ی آغاز پیش‌ستاره ادامه خواهد داست (تا زمانی که جسم روی خط هایاشی قرار می‌گیرد) و از آنجا به بعد مرحله‌ی پیش رشته‌ی اصلی با مقیاس زمانی گرمایی (کلوین–هلمهولتز) ادامه خواهد یافت. هم‌چنین فرض خواهیم کرد که فرآیند سقوط تقریباً هم‌دما بوده و انرژی پتامسیل گرانشی آزاد شده‌ی ابر در حین سقوط (مادامی که عمق نوری ابر خیلی کم است) به طور موثر از آن خارج می‌شود.

ث. ابتدا نشان دهید که برای یک المان جرم در فاصله‌ی r از مرکز ابر که تنها جرم درونی ابر تا آن فاصله (rM) روی آن تاثیر گرانشی دارد (چرا؟) داریم

$$\rho\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}$$

می‌بینیم که اگر ابر در حال تعادل باشد سمت چپ معادله صفر خواهد بود و نتیجه معادله‌ی معروق تعادل هیدروستاتیکی است. اما در این مساله با توجه به فرضیاتی که توضیح دادیم می‌توان گفت

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_r}{r^2}$$

با توجه به این که جرم ابر در حین سقوط پایسته می‌ماند می‌توان نوشت

$$M_r = \frac{4\pi}{3} r_\circ^3 \rho_\circ$$

با توجه به این معادلات و با انتگرال گیری در محدوده‌ی $r = r_\circ$ تا $r \sim 0$ (چرا؟) نشان دهید که مدت زمان سقوط ابر و به عبارت دیگر مدت زمان مقیاس زمانی سقوط آزاد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32} \frac{1}{G\rho_\circ}\right)^{1/2}$$

این معادله هم‌چنین می‌تواند با روش‌های دیگری هم‌چون فرض سقوط ذرات ابر در مدارهای بیضوی کپلری به دست آید.
