مکانیک تحلیلی ۲ - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹   ۹۹/۱/۳۰

حرکت فرفره متقارن بدون حضور نیروی خارجی

در ادامه بحث بررسی دینامیک اجسام صلب، فرفره متقارن با شرایط $I_1 = I_2 \neq I_3$

برای مسائل نحوی می‌پردازیم. معادلات اویلر به صورت زیر خواهد بود.

$$(1)\quad \begin{cases} (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 = 0 \\ (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 - I_2\dot{\omega}_2 = 0 \\ (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(الف)} & (I_1 - I_3)\,\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 = 0 \\ \text{(ب)} & (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 - I_1\dot{\omega}_2 = 0 \\ \text{(ج)} & I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{array}$$

for symmetric top

با توجه به این که هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود، مرکز جرم فرفره یا ثابت است یا با سرعت ثابت نسبت به دستگاه مختصات لخت (ثابت) حرکت می‌کند. از این رو با انتخاب دستگاه جسمی (چرخان) بر روی مرکز جرم فقط به بررسی حرکت دورانی خواهیم پرداخت.

از طرف دیگر با توجه به این که اگر سرعت زاویه بر روی محور اصلی باشد، حرکت بسیار ساده خواهد بود، از این رو فرض می‌کنیم که سرعت زاویه ای در جهت دلخواه است.

با توجه به رابطه ج-1 خواهیم داشت

$$(2)\quad \omega_3(t) = \text{Const.}$$

دو رابطه الف و ب رابطه 1 برابر خواهند بود با

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\left(\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_3\right)\omega_2 & \text{(الف)} \\ \dot{\omega}_2 = \left(\dfrac{I_3 - I_1\,\omega_3}{I_1}\right)\omega_1 & \text{(ب)} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که ترم داخل پرانتز رابطه (3-الف)، (3-ب) به گونه ای نوشته شده که یکسان باشد. از طرف دیگر این ترم ثابت است. از این رو

$$(4)\qquad \Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_3 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega\,\omega_2 = 0 & \text{(الف)} \\ \dot{\omega}_2 - \Omega\,\omega_1 = 0 & \text{(ب)} \end{cases}$$

دو رابطه فوق معادله دیفرانسیل کوپل شده آشنا است که راه حل آن را در این درس قبلاً دیده ایم

ضرب i در (4-ب) جمع:

$$(5)\qquad \dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 - i\Omega\,(\omega_1 + i\omega_2) = 0$$

حال با تغییر متغیر $\eta = \omega_1 + i\omega_2$ معادله دیفرانسیل تبدیل می شود به

$$(6)\qquad \dot{\eta} - i\Omega\,\eta = 0 \quad \text{با حل} \quad \eta(t) = A e^{i\Omega t}$$

که A مختلط است و دارای فاز که آن را با انتخاب زمان اولیه مناسب می توان صفر کرد.

حال با برابر قرار دادن جواب η با تغییر متغیر خواهیم داشت.

$$(7)\qquad \omega_1 + i\omega_2 = A\cos\Omega t + iA\sin\Omega t$$

این بدین معنا است که

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega_1 = A\cos\Omega t \\ \omega_2 = A\sin\Omega t \end{cases}$$

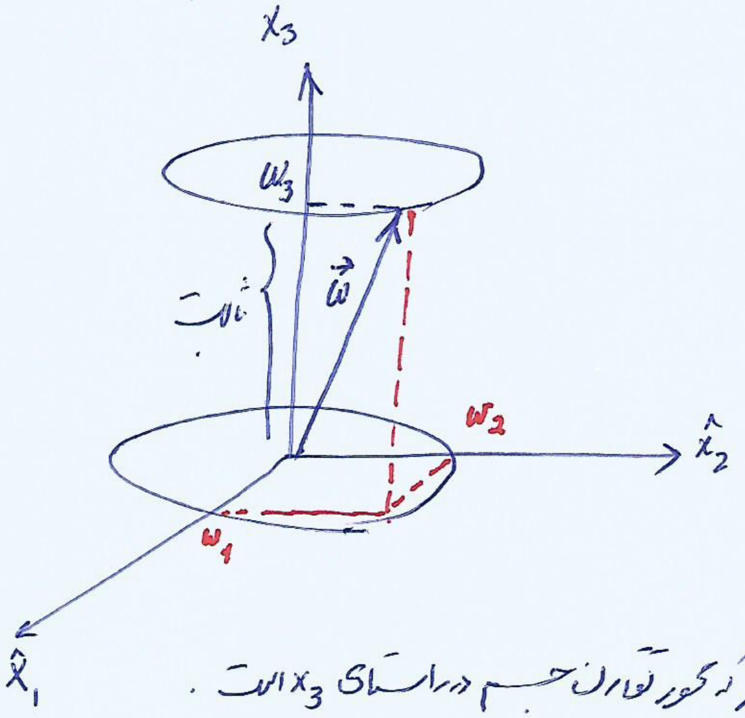
نکته جالب توجه این است که با ثابت بودن ω_3 می توان نشان داد که اندازه سرعت زاویه ای به شکل زیر ثابت است

$$(9)\qquad |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = cte$$

با توجه به جواب (8)، سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$، دارای مولفه ω_3 حول محور $\hat{x}_3$ است که ثابت است

تصویر $\vec{\omega}$ در صفحه $x_1 - x_2$ یک حرکت دایره‌ای دارد. در نتیجه بردار $\vec{\omega}$ با سرعت زاویه‌ای Ω

حول محور $\hat{x}_3$، حرکت تقدیمی "precessed" انجام می‌دهد. به شکل زیر توجه کنید.



(شکل 1)

توجه داشته باشید که محور تقارن جسم در راستای x_3 است.

$\vec{\omega}$ حول محور تقارن حرکت دورانی انجام می‌دهد. برای بررسی ثوابت حرکت باید توجه داشته باشیم

که اندازه حرکت زاویه‌ای در دستگاه لخت ثابت است $\vec{L} = cte$ زیرا هیچ نیروی

خارجی (گشتاور خارجی) به سیستم وارد نمی‌شود.

از طرف دیگر چون انرژی جنبشی انتقالی به خاطر ثابت بودن مرکز جرم صفر است.

ثابت بعدی حرکت انرژی جنبشی دورانی است در نتیجه

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = cte \qquad (10)$$

حال خیلی جالب است چون $\vec{L}$ ثابت است، T_{rot} نیز به همین ترتیب؛ در نتیجه $\vec{\omega}$ به گونه‌ای باید حرکت کند که تصویر آن بر روی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت باشد.

به بیان دیگر $\vec{L}\cdot\vec{\omega}$ ثابت باشد. در نتیجه $\vec{\omega}$ حول $\vec{L}$ باید حرکت تقدیمی انجام دهد.

این بدین معنا است که $\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ و $\hat{x}_3$ (محور تقارن - مولفه سوم مختصه جسمی) هر ۳ در یک صفحه باشند.

برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم $\vec{L}\cdot(\vec{\omega}\times\hat{e}_3)=0$ برای اثبات

$$(11)\quad \left(\hat{e}_1 I_1\omega_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3\right)\cdot\left(\omega_2\hat{e}_1 - \omega_1\hat{e}_2\right)$$

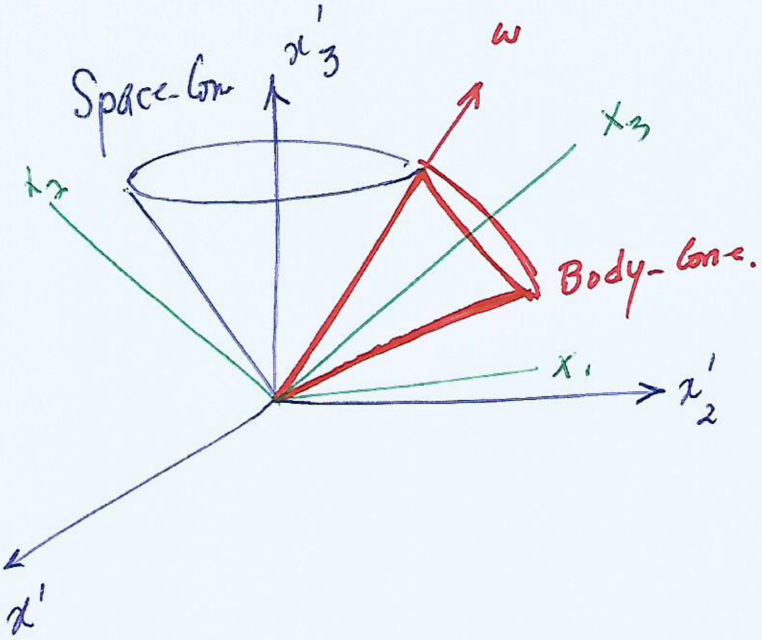
$$= I_1\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1 I_2 = (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 = 0$$

چون طبق تعریف حرکت فرفره متقارن را بررسی می‌کردیم.

حال برای نمایش طرح واره این حرکت دستگاه مختصات ثابت (لخت) را طوری انتخاب می‌کنیم که اندازه حرکت زاویه‌ای در راستای x'_3 باشد.

از این رو بردار $\vec{\omega}$ یکبار حول $\vec{L}$ (x'_3) حرکت دورانی دارد و مخروطی را ایجاد می‌کند که به آن مخروط فضایی Space Cone می‌گویند.

همچنین $\vec{\omega}$ حول $\hat{e}_3$ محور تقارن جسم نیز حرکت دورانی دارد و مخروطی را ایجاد می‌کند که به آن مخروط جسمی Body Cone می‌گویند.



(شکل 2)

x'_i : دستگاه مختصات ثابت (لخت)

x_i : دستگاه مختصات جسم (نالخت) - چرخان

سرعت چرخش $\vec{\omega}$، حول محور تقارن $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$ است.

درصورتی که I_3 نزدیک به I_1 باشد، Ω نسبت به ω_3 بسیار کوچک خواهد بود. یک مثال مهم برای بررسی حرکت تقدیمی، زمین است. زمین در قطب ها پخیدگی دارد در نتیجه می‌توانیم آن را به صورت یک بیضی‌گون پخیده oblat spheroid با $I_1 \simeq I_3$ ($I_3 > I_1$) تقریب بزنیم. برای زمین $\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{300}$ است در نتیجه

(12) $$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 \simeq \frac{\omega_3}{300}$$

و از آن جایی که برای زمین

(13) $$\omega_3 \simeq \omega \ , \ \frac{2\pi}{\omega} = 1\ day$$

از این رو دوره تناوب حرکت تقدیمی برابر است با:

(14) $$\Omega^{-1} \simeq 300\ days$$

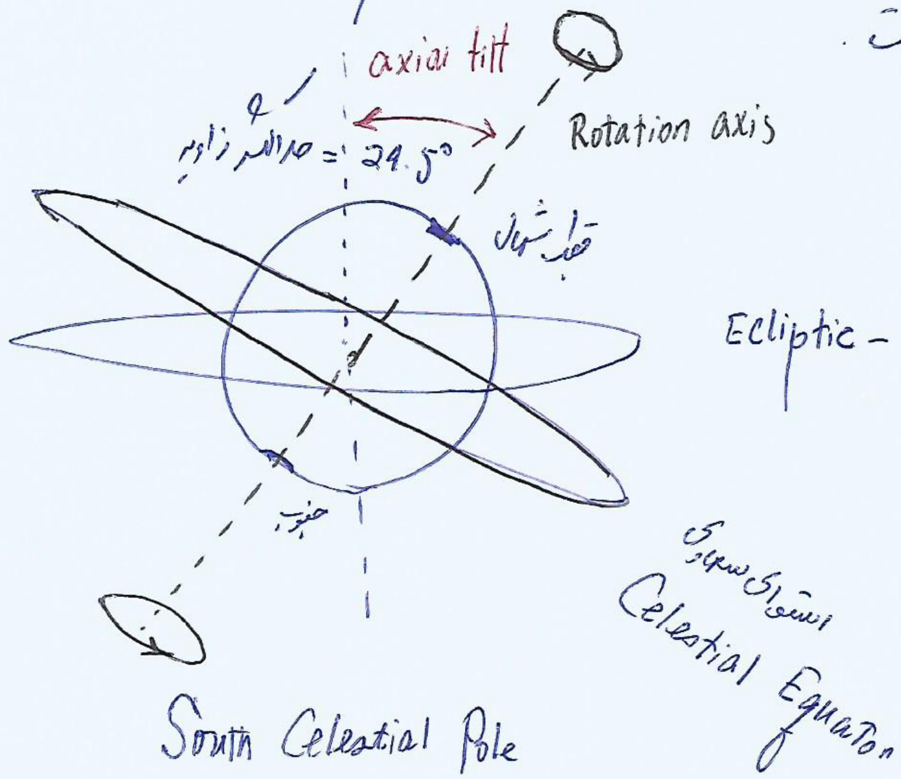
البته دوره تناوب مربوط به حرکت تقدیمی زمین شدید از این مقدار است ، چون

الف) زمین کاملاً جسم صلب نیست

ب) شکل تقریبی زمین به عنوان جسم صلب ، oblate spheroid نیست و همان ها بالاتری

□ برای بررسی حرکت تقدیمی لازم است.

(شکل ۳)



در نتیجه زاویه انحراف محوری axial tilt زاویه بین محور دوران سیاره نسبت به محور مداری آن ،
یا به بیان دیگر زاویه بین صفحه استوای سیاره (جسم) با صفحه مداری orbital plane
است.

زاویه محوری زمین بین 22.1° تا 24.5° در یک سیکل 25772 ساله تغییر می‌کند.

در حال حاضر زاویه محوری زمین $23^\circ\ 26'\ 12.0''$ است،

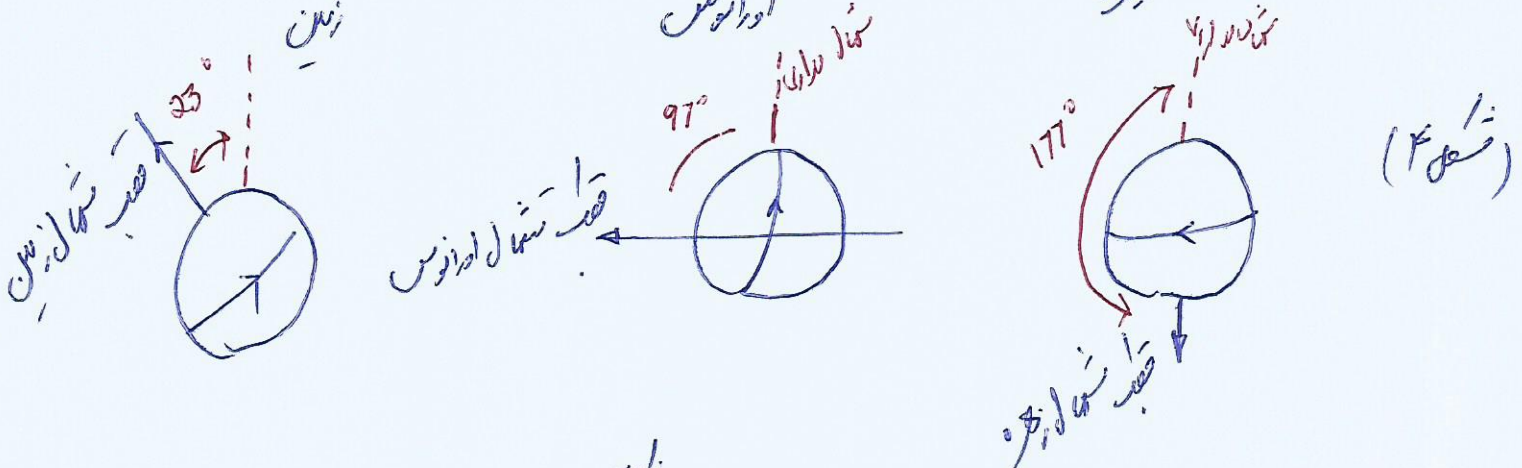
این انحراف زاویه‌ای باعث ایجاد فصل ها می‌شود. در نیمه سال یکی از قطب ها
به سمت خورشید است و در نیمسال بعدی قطب دیگر...

طبق استاندارد International Astronomical Union (IAU)

قطب شمال با قانون دست راست تعریف می‌شود و زاویه محوری بین قطب شمال سیاره و

جهت شمال مدار زمین (سیاره) به دور خورشید تعیین می‌شود به طور شکل

(15) $\varepsilon \simeq 23^\circ$ زمین $\varepsilon = 97^\circ$ اورانوس $\varepsilon \simeq 177^\circ$ زهره



(شکل ۴)

دوره (Epoch) از نجوم حساس تغییرات زاویه محوری تعریف می‌شود به صورت شکل

از J2000.0 تا قرن‌های نجومی محاسبه می‌شود Julian centuries

$$\varepsilon = 23^\circ\ 26'\ 21.448'' - 46.8150''\,T - 0.00059''$$

که T از J2000.0 تعریف می‌شود.

U.S. Naval Observatory; H.M. Nautical Almanac Office (1989), Astronomical Almanac of year.

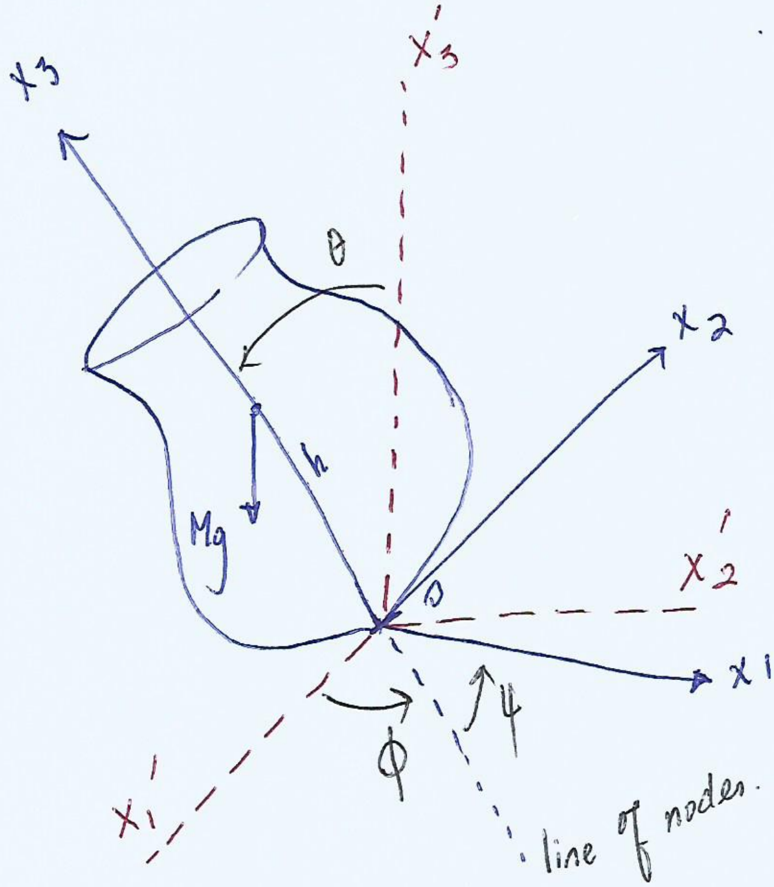
توجه داشته باشید که حرکت تقدیمی مدار با دوره 26000 تغییر ستاره قطبی

به دلیل نیروهای گشتاوری خورشید و ماه است. از این رو حرکت فرفره در نیروی گرانشی هم است.

حرکت فرفره با یک نقطه ثابت

این مسئله اولین بار توسط لاگرانژ در کتاب مکانیک تحلیلی Mécanique analytique حل شده است. مسئله فرفره ثابت در میدان گرانشی که یک نقطه ثابت دارد.

شکل زیر را ملاحظه بفرمایید.



(شکل ۵)

(x_3 , x_2 , x_1)
دستگاه مختصات جسم

(x'_3 , x'_2 , x'_1)
دستگاه مختصات لخت
fixed!

نقطه ثابت فرفره را مرکز دستگاه جسمی و ثابت در نظر می‌گیریم. از این رو دیگر از انرژی جنبشی انتقالی رها خواهیم بود چون $\vec{V} = \vec{R}$

محور x_3 را محور تقارن جسم صلب در نظر می‌گیریم. جرم فرفره M و مرکز جرم تا نقطه ثابت فاصله h را دارد. چون فرفره متقارن است شرایط زیر را برای ممان اینرسی داریم

$$I_1 = I_2 \,, \quad I_1 = I_2 \neq I_3 \tag{16}$$

حال انرژی جنبشی فرفره را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i w_i^2 = \frac{1}{2} I_1 (w_1^2 + w_2^2) + \frac{1}{2} I_3 w_3^2 \tag{17}$$

خاطرتان باشد در جلسه پیش سرعت‌های زاویه‌ای را برحسب زوایای اویلر به صورت زیر نوشتیم

$$\begin{cases} w_1 = \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ w_2 = \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ w_3 = \dot\phi \cos\theta + \dot\psi \end{cases} \tag{18}$$

در نتیجه

$$w_1^2 + w_2^2 = \dot\phi^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + \cancel{2\sin\theta \sin\psi \cos\psi} + \dot\theta^2 \cos^2\psi \tag{19}$$
$$+ \dot\phi^2 \sin^2\theta \cos^2\psi - \cancel{2\sin\theta \sin\psi \cos\psi} + \dot\theta \sin^2\psi$$

$$w_1^2 + w_2^2 = \dot\phi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2$$

و مولفه سوم سرعت

$$w_3^2 = (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2 \tag{20}$$

در نتیجه انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد بود.

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot\phi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2 \tag{21}$$

از آن جایی که انرژی پتانسیل این سیستم $U = +Mgh\cos\theta$ ، لاگرانژی برابر خواهد بود با

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 (\dot\phi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2 - Mgh\cos\theta \tag{22}$$

حال با توجه به لاگرانژی می‌رسیم که ψ و ϕ دو مختصه چرخشی هستند، در نتیجه

تکانه زاویه‌ای تعمیم یافته آن Conjugate momentum، ثوابت حرکت است.

(23) $$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \left(I_1 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta\right)\dot\phi + I_3 \dot\psi \cos\theta = cte$$

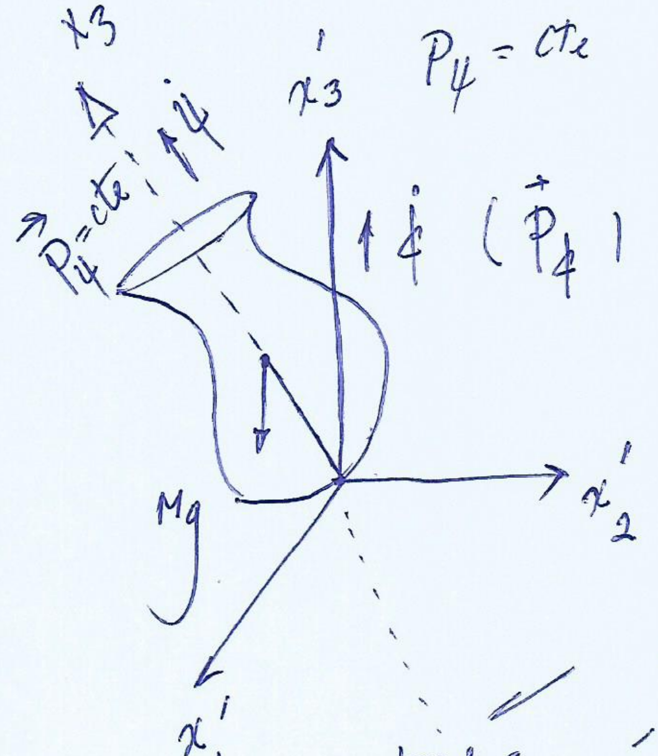
(24) $$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3 \dot\psi + I_3 \dot\phi \cos\theta = cte$$

چون مختصه‌های چرخشی زاویه‌ای هستند تکانه‌های تعمیم یافته، تکانه‌های زاویه‌ای هستند.

جالب این که اندازه حرکت زاویه‌ای در جهت سرعت‌های زاویه‌ای $\dot\psi$ و $\dot\phi$

$\dot\phi$ در جهت محور x_3' : محور z مختصه ثابت ، $P_\phi = cte$

$\dot\psi$ در جهت محور x_3 : محور z مختصه چرخان $P_\psi = cte$



(شکل 2)

نکته بسیار جالب این است که گشتاور

حاصل از نیروی گرانش در جهت محور گره‌هاست

در نتیجه نمی‌تواند هیچ مولفه‌ای در جهت x_3 یا x_3'

داشته باشد.

به همین دلیل است که اندازه حرکت زاویه‌ای در این دو راستا ثابت است.

حال $\dot{\phi}$ و $\dot{\psi}$ را می‌توانیم برحسب زاویه θ و ثوابت حرکت بنویسیم.

(25) $$P_\psi = I_3\dot{\psi} + I_3\dot{\phi}\cos\theta \rightarrow \dot{\psi} = \frac{P_\psi - I_3\dot{\phi}\cos\theta}{I_3}$$

(26) $$P_\phi = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta$$

$$P_\phi = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + \underbrace{P_\psi\cos\theta - I_3\dot{\phi}\cos^2\theta}_{\text{جایگذاری } \dot{\psi} \text{ از رابطه } 25}$$

(26-b) $$\boxed{\dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}}$$

اگر به رابطه (26) توجه کنید تمام [illegible] سمت راست RHS برحسب زاویه θ و ثوابت حرکت است

حال با جایگذاری رابطه فوق می‌توانیم $\dot{\psi}$ را به صورت زیر بنویسیم.

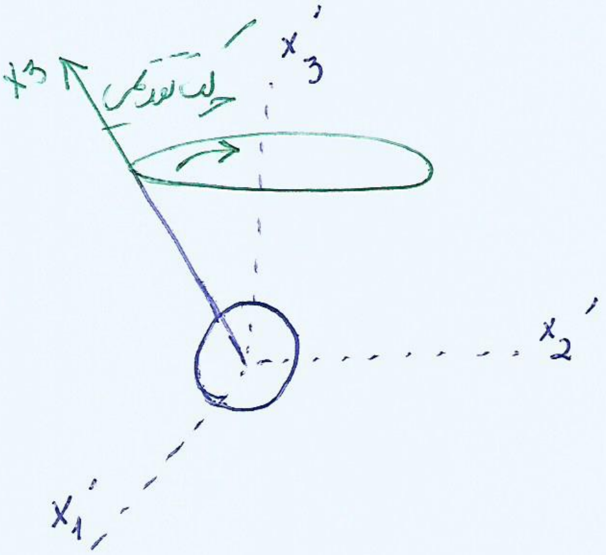
(27) $$\dot{\psi} = \frac{P_\psi}{I_3} - \frac{(P_\phi - P_\psi\cos\theta)\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

در ادامه این حل باید از سومین ثابت انتگرال انرژی استفاده کنیم. این مبحث را در جلسه بعد دنبال خواهیم کرد.

پیش گفتار

در بررسی حرکت یک جسم صلب در دستگاه چرخان، حالت سه نوع دوران براساس زوایای اویلر تعریف می‌شود به صورت زیر

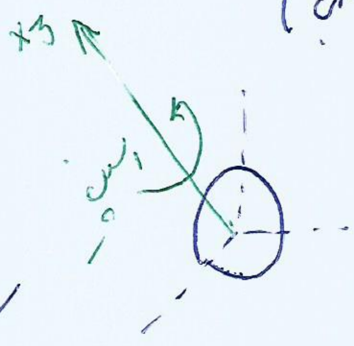
1) Precession (حرکت تقدیمی) : دوران حول محور x_3' (مختصه fix)



* $\dot{\phi}$ در جهت x_3'

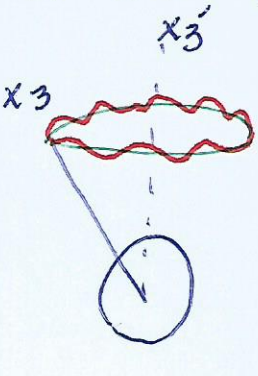
2) intrinsic rotation (spin) اسپین «دوران ذاتی»

دوران حول محور x_3 (مختصه جسم)



* $\dot{\psi}$ در جهت x_3

3) nutation (رقص محور) : دوران حول خط گره‌ها



* $\dot{\theta}$ در جهت خط گره‌ها

(nodding, swaying) nūtātiō از لغت لاتین nutation

اگر این چرخش بدون نیروی خارجی باشد به آن اویلر - nutation گویند.

در سیارات به دلیل اثرات گرانشی و تغییر سرعت ایجاد می‌شود.

University of Oxford

برای زمین این حرکت را منجم انگلیسی James Bradley در سال 1728 کشف کرد. مهم‌ترین اثر بر روی زمین به دلیل تغییر موضع زمین، خورشید، ماه است.

دوره تناوب 18.6 سال است.

بردلی دو کشف مهم انجام داده است 1) رقص محوری 2) ابیراهی نور 1725-1728

"Most brilliant & useful of the century"

by Jean Baptiste Joseph Delambre,

Director of Paris observatory, History of Astronomy in 18 century 1821

« استادرس »