در جلسه پیش درباره مختصات هنجار Normal Coordinate بحث شد. به این ترتیب که جواب برهم نهی شده سیستم نوسانگرهای جفت شده به صورت زیر است.

(1) $$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

فاز

فرکانس r-ام

مربوط به ویژه فرکانس ω_r

ضریب بهنجارش

مربوط به ذره j-ام

سپس با تعریف $\beta_r = \alpha_r e^{-i\delta_r}$ می‌توان مختصه هنجار (نرمال) را به صورت زیر تعریف کرد.

(2) $$\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}$$

در نتیجه

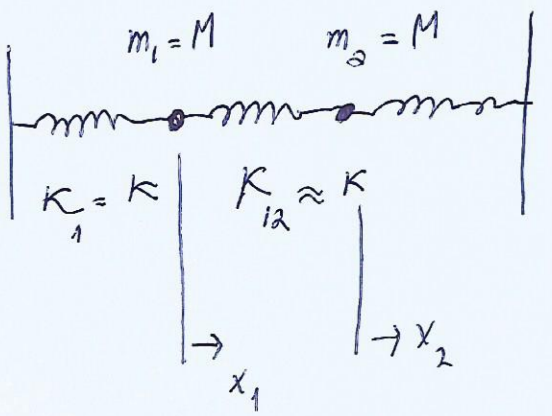
(3) $$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$$

η_r فقط تحت یک فرکانس نوسان می‌کند

(4) $$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

که این رابطه در درسنامه قبل اثبات شد. حال به عنوان مثال مسئله دو جسم ۳ فنر را با فرض ساده‌سازی شده $K_{12} \approx K$ با استفاده از مختصات نرمال حل می‌کنیم

(شکل ۱)



2,

با توجه به تعاریف انرژی جنبشی و پتانسیل داریم A_{jk} ، m_{jk}

(5) الف)
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ U = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 \\ U = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 \end{cases}$$

خواهیم داشت

(6)
$$\{A\} = \begin{pmatrix} K + K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K + K_{12} \end{pmatrix} ; \quad \{m\} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

در نتیجه آن‌گاه $|A_{jk} - w^2 m_{jk}| = 0$ برابر خواهد بود با

(7)
$$\begin{vmatrix} K + K_{12} - M w^2 & -K_{12} \\ -K_{12} & K + K_{12} - M w^2 \end{vmatrix} = 0$$

در قدم بعد با استفاده از $\sum_j (A_{jk} - w_r^2 m_{jk}) a_{jr} = 0$ می‌توان نسبت ویژه بردارها را به دست آورد.

$r = 1$ | $K = 1$) ارتعاش اول : $(A_{11} - w_1^2 m_{11}) a_{11} + (A_{21} - w_1^2 m_{21}) a_{21} = 0$

با جایگذاری مقادیر داریم $w_1 = \sqrt{3K/M}$ و $K_{12} \sim K$

(8)
$$\left(2K - \frac{3K}{M} \cdot M\right) a_{11} + \left(-K - \frac{3K}{M} \times 0\right) a_{21} = 0$$

$$-K a_{11} - K a_{21} = 0 \rightarrow a_{11} = -a_{21}$$

حال برای $k=2$, $r=1$ خواهیم داشت

(9) $$\sum_j \left(A_{jk} - w_r^2 m_{jk}\right) a_{jr} = 0$$

با جایگذاری

$$\rightarrow \left(A_{12} - w_1^2 m_{12}\right) a_{11} + \left(A_{22} - w_1^2 m_{22}\right) a_{21} = 0$$

$$\left(-K - \frac{3K}{M} \times 0\right) a_{11} + \left(2K - \frac{3K}{M} M\right) a_{21} = 0$$

همان نتیجه $a_{11} = -a_{21}$ در حالت $k=1$, $k=2$ دست یافتیم!

حال برای $k=1$, $r=2$ خواهیم داشت.

(10) $$\left(A_{11} - w_2^2 m_{11}\right) a_{12} + \left(A_{21} - w_2^2 m_{21}\right) a_{22} = 0$$

$$\rightarrow \left(2K - \left(\sqrt{K/M}\right)^2 M\right) a_{12} + \left(-K - \left(\sqrt{K/M}\right)^2 \times 0\right) a_{22} = 0$$

$$K a_{12} - K a_{22} = 0 \rightarrow a_{12} = a_{22}$$

حال با استفاده از روابط کسب شده ضرایب مختصات هنجار را با رابطه $q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)$ به صورت زیر خواهد بود.

(11) $$\begin{cases} x_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ x_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \\ x_2 = -a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{cases}$$

حال به طور واضح می‌توان مختصات بهنجار را به شکل زیر نوشت.

(12) $$\eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 + x_2) \qquad \eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 - x_2)$$

حال اگر

(13) $\eta_1 = 0 \to \eta_2$ وضعیت مُد $(x_1 = x_2)$ in phase symmetrical mode

(14) $\eta_2 = 0 \to \eta_1$ وضعیت مُد $(x_1 = -x_2)$ out of phase antisymmetrical mode.

حال هدف این است که بردارهای ویژه مربوط به هر فرکانس را از رابطه $\vec{a} : a_r = \sum_j a_{jr}\hat{e}_r$ به دست آوریم.

(15)

الف) $\omega_1 : \underbrace{a_1}_{\text{مربوط به فرکانس 1}} = a_{11}\hat{e}_1 + a_{21}\hat{e}_2$

ب) $\omega_2 : a_2 = a_{12}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2$

با توجه به $a_{11} = -a_{21}$ و $a_{12} = a_{22}$ خواهیم داشت.

(16) $$\begin{cases} \vec{a}_1 = a_{11}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \\ \vec{a}_2 = a_{22}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \end{cases}$$

حال برای اعمال به شرط متعامد بهنجار orthonormality داریم.

(7) $$\sum_{jk} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = \delta_{rs}$$

خواهیم داشت .

(8) $r = s = 1$

$$1 = \sum_{jk} m_{jk}\, a_{j1}\, a_{k1} = m_{11} a_{11} a_{11} + m_{12} a_{11} a_{21} + m_{21} a_{21} a_{11} + m_{22} a_{21} a_{21}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = M a_{11}^2 + M a_{21}^2 \quad \rightarrow \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2M}} = -a_{21}$$

و برای $r=1,\ s=2$ خواهیم داشت .

(9) $r=1$, $s=2$

$$0 = \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{j1}\, a_{k2} = m_{11} a_{11} a_{12} + m_{12} a_{11} a_{22} + m_{21} a_{21} a_{12} + m_{22} a_{21} a_{22}$$

$$= M(-a_{21})(a_{12}) + M(a_{21})(a_{12}) = 0$$

trivial

(10) $r = s = 2$

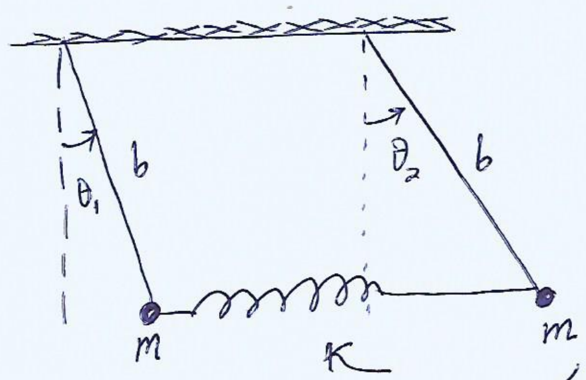
$$1 = \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{j2}\, a_{k2} = m_{11} a_{12} a_{12} + m_{12} a_{12} a_{22} + m_{21} a_{22} a_{12} + m_{22} a_{22} a_{22}$$

$$\rightarrow 1 = M a_{12}^2 + M a_{12}^2 \quad \rightarrow \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2M}} = a_{22}$$

مثال : آونگ های کوپل شده :

دو آونگ به طول b با جرم ذره m که با ثابت فنر K با یکدیگر متصل شده اند را در نظر بگیرید.

(شکل 2)



مختصه های تعمیم یافته را θ_1 ، θ_2 در نظر میگیریم. سطح صفر پتانسیل در نقطه تعادل اگر باشد، انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر خواهد بود.

(11) $$T = \frac{1}{2} m (b\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m (b\dot{\theta}_2)^2$$

(12) $$U = mgb(1-\cos\theta_1) + mgb(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2} K (b\sin\theta_1 - b\sin\theta_2)^2$$

حال با تقریب زوایای کوچک $\sin\theta \approx \theta$ ، $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ انرژی پتانسیل را به صورت زیر بازنویسی میکنیم.

(13) $$U = \frac{mgb}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

Note: $(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2)$

حال با توجه به توابع $U = \frac{1}{2} A_{jk} q_j q_k$ و $T = \frac{1}{2} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ خواهیم داشت

7/

{A} و {m} به صورت زیر به دست می آیند.

(14) $$\{m\} = \begin{pmatrix} mb^2 & 0 \\ 0 & mb^2 \end{pmatrix} \qquad \{A\} = \begin{pmatrix} mgb + Kb^2 & -Kb^2 \\ -Kb^2 & mgb + Kb^2 \end{pmatrix}$$

برای یافتن eigenfrequencies ، ω خواهیم داشت.

(15) $$\begin{vmatrix} mgb + Kb^2 - \omega^2 mb^2 & -Kb^2 \\ -Kb^2 & mgb + Kb^2 - \omega^2 mb^2 \end{vmatrix} = 0$$

که معادله Charactristic equation را به دست می دهد

(16) $$b^2 \left(mg + Kb - \omega^2 mb\right)^2 - \left(Kb^2\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \left(mg + Kb - \omega^2 mb\right)^2 = (Kb)^2$$

$$\rightarrow mg + Kb - \omega^2 mb = \pm Kb$$

حال علامت (+) را برای ω_1 ، (-) را برای ω_2 در نظر گرفتیم

(17) $$mg + Kb - \omega_1^2 mb = Kb \rightarrow \omega_1^2 = g/b$$

(18) $$mg + Kb - \omega_2^2 mb = -Kb \rightarrow \omega_2^2 = g/b + 2K/m$$

حال فرکانس های به دست آمده را در رابطه $\sum_j (A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}) a_{jr} = 0$

و با $K=1$ قرار دهیم

(19) $$(A_{11} - \omega_r^2 m_{11}) a_{1r} + (A_{21} - \omega_r^2 m_{21}) a_{2r} = 0$$

مربوط به فرکانس r

(20) $$(mgb + kb^2 - \omega_r^2 mb^2) a_{1r} + (-kb^2) a_{2r} = 0$$

حال به ازای $r=1$ $\left(\omega_1^2 = \frac{g}{b} \text{ فرکانس}\right)$ ، $r=2$ $\left(\omega_2^2 = \frac{g}{b} + \frac{2k}{m} \text{ فرکانس}\right)$

خواهیم داشت:

(21) $$r=1: \left(\cancel{mgb + kb^2 - \frac{g}{b} mb^2}\right) a_{11} - kb^2 a_{21} = 0$$

$$\rightarrow \quad a_{11} = a_{21}$$

حال برای $r=2$ به طور مشابه

(22) $$r=2: \left(mgb + kb^2 - \frac{g}{b} mb^2 - \frac{2k}{m} mb^2\right) a_{12}$$

$$-(kb^2)\, a_{22} = 0$$

$$\rightarrow \quad a_{12} = -a_{22}$$

حال می‌توانیم مختصه بهنجار را برحسب زاویه‌های زیر به صورت زیر بنویسیم ...

$$(23)\qquad \begin{cases} \theta_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ \theta_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{cases}$$

با توجه به $a_{11}=a_{21}$ و $a_{12}=-a_{22}$ مختصات تعمیم یافته، مُدهای زیر به صورت زیر به دست می‌آیند

$$(24)\qquad \begin{cases} \theta_1 = a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2 \\ \theta_2 = a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{1}{2a_{11}}(\theta_1+\theta_2) \\ \eta_2 = \dfrac{1}{2a_{22}}(\theta_2-\theta_1) \end{cases}$$

برای بررسی حرکت داریم

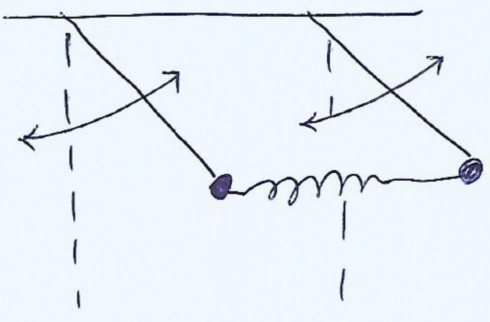
(25)

برای مُد η_1 $\quad (\eta_2 = 0) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

حرکت متقارن

$$\omega_1 = \sqrt{g/b}$$

(شکل 3



Symmetric

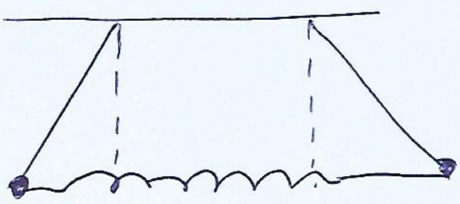
(26)

برای مُد η_2 $\quad (\eta_1 = 0) \quad \theta_1 = -\theta_2$

حرکت پادمتقارن

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{b} + \frac{2K}{m}}$$

(شکل 4

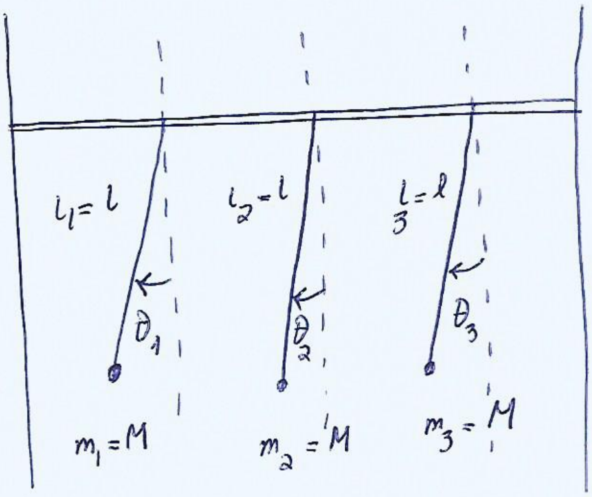


antisymmetric

مثال: ۳ آونگ کوپل شده برای بررسی سیستم هایی که دارای چندگانگی Degeneracy هستند.

فرض کنید که ۳ آونگ مطابق شکل زیر توسط میله‌ای که کاملا صلب نیست (امکان پیچ و اندرکنش) در حال حرکت هستند. فرکانس، ویژه بردار، مختصه بهنجار آن را به دست آورید.

(27)



برای حل این مسئله در واحدهای طبیعی (مسئله خاص) که طول l، جرم M، شتاب گرانش g را برابر واحد بگیریم در این صورت انرژی جنبشی و پتانسیل را به صورت زیر خواهیم داشت.

(28) $$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right)$$

(29) $$U = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}_{\text{ترم مربوط به پتانسیل های گرانشی}} \underbrace{- 2\epsilon\theta_1\theta_2 - 2\epsilon\theta_1\theta_3 - 2\epsilon\theta_2\theta_3}_{\text{ترم های اندرکنشی}}\right)$$

$$U = mgh(1-\cos\theta) \simeq \underbrace{Mgl}_{1}\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) + O(\theta^3)$$

با توجه به ترم های مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل خواهیم داشت

(30) $$\{m\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{A\} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

11

دترمینان ضرایب برابر خواهد با

(31) $$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\omega^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 = \left| A_{jk} - \omega^2 m_{jk} \right|$$

(32) $$(1-\omega^2)^3 - 2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2(1-\omega^2) = 0$$

$$(\omega^2 - 1 - \varepsilon)^2 (\omega^2 - 1 + 2\varepsilon) = 0$$

در نتیجه ریشه‌ها برابر خواهند بود با

(33) $$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{1+\varepsilon} \\ \omega_2 = \sqrt{1+\varepsilon} \\ \omega_3 = \sqrt{1-2\varepsilon} \end{cases}$$

در این مثال خاص ω_1 و ω_2 با هم برابر بود و در نتیجه مختصات بهنجار مربوط چندگانگی دارد.

ابتدا از ویژه بردار سوم شروع می‌کنیم

(34) $$\sum_j \left(A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}\right) a_{jr} = 0$$

$r=3$ $$\sum_j \left(A_{jk} - \omega_3^2 m_{jk}\right) a_{j3} = 0$$

$k=1$: $$0 = \left(A_{11} - \omega_3^2 m_{11}\right) a_{13} + \left(A_{21} - \omega_3^2 m_{21}\right) a_{23} + \left(A_{31} - \omega_3^2 m_{31}\right) a_{33}$$

$$0 = \underbrace{(1-\omega_3^2)}_{(1-2\varepsilon)} a_{13} + (-\varepsilon) a_{23} + (-\varepsilon) a_{33}$$

(34-f) $$0 = 2\varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33}$$

(35) $\quad r=3 \qquad \sum_j \left(A_{jk} - \omega_3^2 m_{jk}\right) a_{j3} = 0$

$$k = 2 \rightarrow 0 = \left(A_{12} - \omega_3^2 m_{12}\right) a_{13} + \left(A_{22} - \omega_3^2 m_{22}\right) a_{23} + \left(A_{32} - \omega_3^2 m_{32}\right) a_{33}$$

$$0 = (-\varepsilon)\, a_{13} + (1 - \underbrace{\omega_3^2}_{1-2\varepsilon})\, a_{23} + (-\varepsilon)\, a_{33}$$

(35-f) $\qquad -\varepsilon a_{13} + 2\varepsilon a_{23} - \varepsilon a_{33} = 0$

دو عبارت (34-f) ، (35-f) نتیجه می‌دهد.

(36) $\qquad a_{13} = a_{23} = a_{33}$

حال با توجه به شرط بهنجارش

(37) $\qquad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$

خواهیم داشت

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

این اصل کلی است که در مشخص کردن ویژه بردارهای مربوط به فرکانس ویژه‌ای که خصلت degenerate نسبت به شکلی وجود ندارد. در ضمن این حرکت مربوط به نوسان هم فاز هر سه آونگ با یکدیگر است.

حال باید ۲ ویژه بردار دیگر را تعیین کنیم که ۶ معادله وجود دارد برای 2 فرکانس (۲) ، 3

مولفه‌ی برای تعیین ۶ مولفه a_{j1} ، a_{j2} ، درحالی که بعنوان رابطه‌ها قرار دارند.

از رابطه $\sum_j \left(A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}\right) a_{jr} = 0$ فقط دو رابطه زیر از یکدیگر مستقل هستند.

(38) $$\epsilon\left(a_{11} + a_{21} + a_{31}\right) = 0$$

(39) $$\epsilon\left(a_{12} + a_{22} + a_{32}\right) = 0$$

رابطه دیگری که می‌توانیم استفاده کنیم رابطه تعامد یا orthogonality است.

(40) $$\sum_{jk} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = 0 \qquad r \neq s$$

از آنجایی که $m_{jk} = \delta_{jk}$ است در نتیجه

(41) $$\sum_j a_{jr}\, a_{js} = 0 \qquad r \neq s$$

در نتیجه یک رابطه جدید به دست میاریم

(42) $$a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32} = 0$$

j

زمانی $2, 1$ $r \neq s$

و در نهایت شرط بهنجارش را داریم

(43) $$1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2$$

(44) $$1 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2$$

در نتیجه فقط 5 معادله داریم (44 - 43 - 42 - 39 - 38) برای 6 نامعلوم a_{j1} , a_{j2} . دقیقا شبیه حالتی است که برای محورهای اصلی در جسم صلب مواجه شدیم.

اگر انتخاب کنیم که $a_{31} = 0$ باشد، بردارهای متعامد دوتایی مربوط به فرکانس ω_1 , ω_2 را بدست می‌آوریم که در همه روابط قیدی صدق می‌کنند.

(45) $$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$$

دو اتم out of phase با دامنه یکسان نوسان می‌کنند

اتم سوم ساکن است

(46) $$\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2)$$

دو اتم هم فاز با دامنه یکسان نوسان می‌کنند

اتم سوم out of phase با دو برابر دامنه نوسان می‌کند.

(47) $$\vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

Non degenerate

In phase.

این مسئله نشان می‌دهد که بی‌نهایت شرایط دیگر Configuration برای مسئله وجود دارد

German words in physics

1) Ansatz : An assumption for a function that is not based on an underlying theory.

2) Bremsstrahlung : literally "brake radiation"

3) Durchmusterung : the search for celestial objects, especially a survey of stars.

4) Gedanken experiment : "thought experiment

5) Vierbein, tetrad

6) Eigen : special