1

۹۹/۳/۲۴

مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹/۹۸

تقارن های داخلی: "Internal Symmetries"

تاکنون در بحث های مکانیک کلاسیک و نظریه میدان کلاسیک درباره تقارن های خارجی external symmetries صحبت کرده ایم. تقارن در فضا و زمان، مفهوم تانسور انرژی-تکانه از یک سو و تبدیلات لورنتس و پوانکاره از سوی دیگر، جزء تبدیلات پیوسته هستند. البته تبدیل، تقارن های داخلی در فیزیک نظری اهمیت دارند.

یک تقارن داخلی گسسته discrete internal symmetry، تقارن Z_2 است که به صورت زیر بر روی میدان اثر می کند.

$$\phi(x) \longrightarrow -\phi(x) \qquad (1)$$

این تقارن لاگرانژی $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$ را ناوردا نگه می دارد، البته در صورتی که تنها پتانسیل توان های زوج از ϕ را داشته باشند. البته از آن جایی که این تبدیل پیوسته نیست، نمی توان از قضیه نوتر استفاده کرد و جریان پایسته بدست آورد.

در ادامه خودمان را محدود به پتانسیل توان 2 و توان 4، میدان خواهیم کرد.

$$V = V_0 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \qquad (2)$$

V_0، ترم ثابت در پتانسیل است که معادله حرکت equation of motion (EOM) را تغییر نمی دهد.

حال به دنبال راه حل میدان اسکالر با پتانسیل فوق هستیم

که جواب نزدیک به معادله حرکت $\partial^\mu \partial_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ ، جواب $\phi(x) = v = cte$ است

که به معنای این است که باید اکسترمم

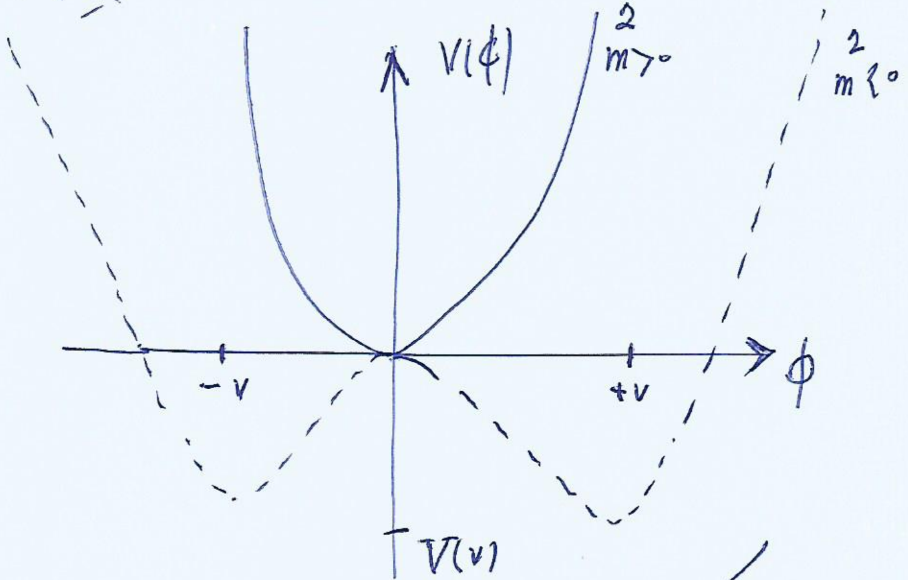
پتانسیل را محاسبه کنیم. این بدین معنا است

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi}\right|_{\phi = v} = 0 \qquad (3)$$

که برای کمینه کردن انرژی، کمینه پتانسیل مورد توجه است. این جواب ها را خلاء یا نقطه کلاسیک می گویند.

(در ادامه فرض می کنیم $\lambda > 0$ باشد زیرا λ منفی سیستم را در ϕ های بزرگ نامقید می کند.)

شکل پتانسیل برای حالت $m^2 > 0$ (خط ممتد) و $m^2 < 0$ (نقطه چین) به شکل زیر است.



(شکل 1)

در حالت $m^2 > 0$ یک کمینه وجود دارد و آن در $\phi = 0$ است. این نقطه تحت تبدیل Z_2 به خودش تبدیل می شود. این بدین معنا است که تقارن در این خلاء شکسته نشده است.

Symmetry is unbroken in this vacuum.

3 /

حالت $m^2<0$ همچنان تقارن دارد $\phi=0$ نقطه بیشینه است، و پتانسیل دارای دو کمینه است.

(4) $$V=V_0+\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \to \frac{\partial V}{\partial\phi}=m^2\phi+\frac{\lambda}{6}\phi^3=0$$

(5) $$\phi=\pm v=\pm\sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}$$

که در نقاط مینیمم دارای مقدار زیر را دارد.

(6) $$V(v)=V_0+\frac{1}{2}m^2\left(\frac{-6m^2}{\lambda}\right)+\frac{\lambda}{4!}\cdot\frac{36m^4}{\lambda^2}$$
$$=V_0-3\,{m^4}/{\lambda}+\frac{3}{2}\,{m^4}/{\lambda}=V_0-\frac{3}{2}\,{m^4}/{\lambda}$$
$$=V_0-\frac{\lambda v^4}{24}$$

حال توجه داشته باشید که هیچ کدام از کمینه ها تحت Z_2 ناوردا نیستند. و کمینه ها تحت $\phi(x)\to-\phi(x)$ جابجا می‌شوند. در این حالت می‌گوییم که تقارن به صورت خود به خودی شکسته است.

Symmetry is spontaneously broken !

این بدین معنا است که تقارن سیستم به صورت خودبخودی یا طبیعی توسط راه حل خلاء نظریه (vacuum solution of theory) شکسته است.

این مفهوم شکست خود به خودی تقارن در فیزیک بسیار مهم است.

تقارن داخلی پیوسته : Continou Internal Symmetries

تقارن های داخلی و پیوسته در فیزیک اهمیت بسزایی دارند. برای شروع از نظریه میدان اسکالر با دو میدان ϕ_1 و ϕ_2 شروع می کنیم. این دو میدان را به صورت یک مجموعه دوتایی می نویسیم ...

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

حال به نظریه‌هایی علاقه داریم که تحت تبدیل $SO(2)$ ناوردا باشند (internal 2-dimensional rotations)

$$\phi \to \phi' = O\phi \tag{8}$$

از آنجایی که این تبدیلات در هر نقطه فضا-زمان صحیح است. به این نوع تقارن ها global گویند.

در تبدیل local تبدیل تابعی از هر نقطه فضا-زمان است.

طول میدان ϕ یک ناوردا است. از این رو ماتریس O ویژگی های زیر را باید داشته باشد.

$$O^T O = O O^T = 1_2 \quad , \quad \det(O) = +1 \tag{9}$$

دوران های مناسب ۲ بُعدی به صورت زیر می توانند نوشته شوند.

$$O = e^{i\alpha T} \tag{10}$$

که α پارامتر حقیقی است (زاویه دوران)، T یک ماتریس 2×2 است که دوران های 2 بعدی را تولید می کند.

ماتریس مولد 2×2 به صورت زیر است.

(11) $$T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

به این گروه، گروه $SO(2)$ گویند که به این گروه، آبلی abelian group می گویند

(12) $$e^{i\alpha T} e^{i\beta T} = e^{i\beta T} e^{i\alpha T} = e^{i(\alpha+\beta)T}$$

به این معنا است که ترتیب دوران ها مهم نیست.

دوران در ۳ بعد کمی پیچیده تر است گروه $SO(3)$ دارای 3، $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ پارامتر

آزاد (آزادی) است و دارای سه مولد $T_i \; (i=1,2,3)$ است.

گروه $SO(3)$ بر روی میدان اسکالر به صورت زیر است.

(13) $$\phi \rightarrow \phi' = \phi + i\alpha^i T_i \phi$$

شرایط مولد T_i هرمیتی و بدون رد بودن است.

(14) $$\phi \rightarrow \phi' = \phi + i\alpha^i T_i \phi \; ; \; (T_i)^\dagger = T \; ; \; Tr(T) = 0$$

یک نمونه از ماتریس های دوران 3×3 به صورت زیر است.

(15) $$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \; T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که آن را می‌توان به شکل روابط جابه‌جایی زیر نوشت:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \quad (16)$$

این بدین معناست که گروه $SO(3)$ غیرآبلی "non-abelian" است.

نمونه دیگری از گروه‌های غیرآبلی special unitary group $SU(n)$ است که مجموع ماتریس‌های مختلط $n \times n$ است که روابط زیر صدق می‌کند.

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}_n \;, \quad \det(U) = +1 \quad (17)$$

ساده‌ترین و جذاب‌ترین مثال $SU(2)$ است که $2^2 - 1 = 3$ مولد دارد.

که در نزدیکی عنصر واحد می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$U = \mathbb{1}_2 + i t^i \tau_i \quad (18)$$

که τ_i در روابط زیر صدق می‌کند.

$$\tau_i^\dagger = \tau_i \;, \quad Tr(\tau_i) = 0 \quad (19)$$

یک انتخاب مناسب برحسب ماتریس‌های پاولی است.

$$\tau_i = \sigma_i/2$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

با توجه به این که

(21) $$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

خواهیم داشت.

(22) $$\mathrm{Tr}(\tau_i \tau_j) = \delta_{ij}/2$$

(23) $$[\tau_i, \tau_j] = i \epsilon_{ijk} \tau_k$$

می‌توانید در مورد ارتباط بین دو گروه $SO(3)$ ، $SU(2)$ بیشتر مطالعه کنید!

□ نظریه میدان اسکالر مختلط با تقارن $U(1)$

حال دو میدان اسکالر را که در بخش قبل تعریف کرده بودیم را به صورت میدان مختلط کلاین-گوردن که single complex Klein-Gordon field تعریف می‌کنیم.

(24) $$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

در مورد میدان مختلط فوق تبدیل $\phi \to \phi' = O\phi$ به صورت زیر عمل می‌کند.

(25) $$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ i\phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ i\phi_2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

(26) $$\phi_1 + i\phi_2 \rightarrow e^{i\alpha}(\phi_1 + i\phi_2)$$

در نتیجه تبدیل global ، U(1) به صورت زیر است

(27) $$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \quad ; \quad \phi^* \rightarrow (\phi')^* = e^{-i\alpha}\phi^*$$

تبدیل متفاوت ϕ و ϕ^* به ما اعلام می کند که بار این میدان +1 و -1 است.

برای نوشتن لاگرانژی ناوردای تحت تبدیل U(1) باید تعداد یکسانی از میدان های ϕ و ϕ^* را در لاگرانژی داشته باشیم. به طور مثال

(28) $$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi^*\phi)$$

با

(29) $$V(\phi^*\phi) = V_0 + m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2$$

توجه داشته باشید که α مستقل از فضا-زمان است. با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ خواهیم داشت

(30) $$\partial^2\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = \partial^2\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)\phi = 0$$

و به طور مشابه می توانیم EOM برای ϕ^* را می نویسیم.

تکانه متمم $\pi^* = \dot{\phi}$ و $\pi = \dot{\phi}^*$ در نتیجه هملتونی به صورت زیر است

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L} = \pi^*\pi + (\vec{\nabla}\phi^*)\cdot(\vec{\nabla}\phi) + V(\phi^*\phi) \tag{31}$$

از آنجایی که نظریه تحت انتقال و تبدیل لورنتس ناوردا است، از این رو می‌توان تانسور انرژی-تکانه را به دست آورد

به خاطر تقارن درونی

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi\,, \quad \phi^* \to (\phi')^* = e^{-i\alpha}\phi^* \tag{32}$$

یک جریان پایسته خواهیم داشت.

وردش ϕ, ϕ^* به عنوان میدان های پایسته تحت تقارن $U(1)$

$$\delta\phi = i\alpha\phi\,, \quad \delta\phi^* = -i\alpha\phi^* \tag{33}$$

با توجه به تعریف

$$\underbrace{J^\mu}_{\text{جریان}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a - \mathcal{J}^\mu$$

خواهیم داشت

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \tag{34}$$

$$Q = i\int d^3x\,(\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*)$$

$$= i\int d^3x\,(\phi^*\pi^* - \phi\pi)$$

باید توجه داشت که بار پایسته به اندازه ضریب و یک عدد جمع درجه آزادی دارد

$$c_1 Q_1 + c_2 = Q_2 \tag{35}$$

که Q_1 , Q_2 ثابت هستند.

در انتها مباحث زیر را به عنوان تکلیف درسی برای مطالعه بیشتر ذکر شده است.

a) Spontaneous symmetry breaking in complex scalar field

b) Goldston's theorem

c) Scalar field theory with $SU(2) \times U(1)$ Symmetry

d) Higgs Mechanism.

e) Massive Vector field

« پایان درس »