## فصل ۱۰ - حرکت در دستگاه مختصات نالخت

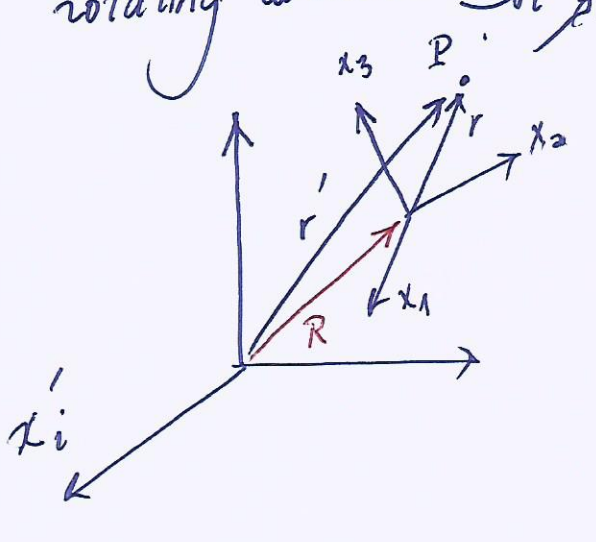
برای این که قوانین حرکت را فرمول بندی کنیم، ناظرها و دستگاه مختصات لخت را توصیف کردیم. ولی این دستگاه‌های مختصات بسیار مجرد abstract هستند و در واقع دستگاه‌های ناظر شتابدارند. به طور مثال دستگاه مختصات متصل به زمین، دستگاه نالخت است. زمین به دلیل حرکت پیچیده‌ای که دور خورشید، مرکز کهکشان و ستاره‌های دور دست ثابت دارد، دستگاه نالخت است. لازم بود بدانیم مکانیک کلاسیک را بتوانیم برای این ناظرها فرمول بندی کنیم.

مبحث فیزیک دستگاه‌های شتابدار و دینامیک آن‌ها یکی از مهمترین خطوط فکری فیزیک است که منجر به درک بهتر ما از ساختار فضا-زمان و نیروی گرانش شد.

□ دستگاه چرخان

فرض کنید دو دستگاه (ناظر) داشته باشیم. ۱) دستگاه ثابت fixed (دستگاه لخت)

۲) دستگاه چرخان (شتابدار) نسبت به ناظر ثابت rotating coordinate




(شکل ۱)

$x'_i$ : دستگاه ثابت

$x_i$ : مختصه در دستگاه چرخان

اگر نقطه P را به عنوان یک رویداد در نظر بگیریم. مختصه آن در دو دستگاه به صورت زیر خواهد بود.

$$\vec{r}\,' = \vec{R} + \vec{r} \qquad (1)$$

مختصه در دستگاه ثابت      مختصه در دستگاه چرخان

$\vec{R}$ مختصه مبدا دستگاه چرخان را در دستگاه ثابت به دست می‌دهد.

حال فرض کنید که هر جابه‌جایی دیفرانسیلی infinitesimal displacement را بتوان به صورت یک دوران دیفرانسیلی حول یک محور چرخش لحظه‌ای instantaneous axis of rotation نشان داد.

به صورت

$$(d\vec{r})_{fixed} = d\vec{\theta} \times \vec{r} \qquad (2)$$

باید توجه داشت که زیر اندیس fixed بدین معناست که این کمیت در دستگاه ثابت اندازه‌گیری شده است. این ایده که هر حرکت را می‌توان به صورت دیفرانسیلی چرخش حول محور لحظه‌ای در نظر گرفت در مسائل متفاوت فیزیک کلاسیک دیده شده است. به طور مثال دیسکی که از سطح شیبدار به پایین می‌غلتد، دوران کامل حول نقطه تماس انجام می‌دهد که این نقطه تماس در هر لحظه جابه‌جا می‌شود.

حال تغییرات زمانی رابطه (2) برابر خواهد بود با

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{fixed} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} \qquad (3)$$

از طرف دیگر سرعت زاویه‌ای چرخشی با $\omega$ نشان داده می‌شود.

$\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$

درنتیجه برای نقطه P که در دستگاه $x_i$ (چرخان) ثابت است داریم:

$$(4) \qquad \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{fixed} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{for fixed } P \text{ in rotating frame!}$$

حال اگر نقطه P در دستگاه چرخان حرکت داشته باشد خواهیم داشت:

$$(5) \qquad \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rotating} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

توجه داشته باشید که سرعت ذره در دستگاه چرخان با ترم $\vec{\omega} \times \vec{r}$ اضافه شده است.

گرچه در طی تقسیم فوق از بردار مکان جابه‌جایی استفاده کردیم، ولی نتیجه فوق برای هر برداری صحیح است،

اگر $\vec{Q}$ بردار دلخواه باشد، داریم:

$$(6) \qquad \left.\frac{d\vec{Q}}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{Q}}{dt}\right|_{rotating} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

رابطه بالا بسیار رابطه مهمی است. مثال جالب این که شتاب زاویه‌ای در دو دستگاه ثابت

و چرخان برابر است زیرا

$$(7) \qquad \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{rotating} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_{=0} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{rotating}$$

در قدم بعد می‌توانیم سرعت یک ذره متحرک را در دستگاه ثابت محاسبه کنیم.

(8) $\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} \xrightarrow[\text{در دستگاه ثابت}]{\text{مشتق نسبت به زمان}} \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{fixed} + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{fixed}$

توجه داشته باشید که مشتق نسبت به زمان در دستگاه ثابت محاسبه شده است. حال با توجه به توضیح مهم رابطه (6) خواهیم داشت.

(9) $$\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{fixed} + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rotating} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

حال می‌توانیم Notation زیر را برای ادامه بحث تعریف کنیم

- تغییرات بردار جابجا در دستگاه‌ها نسبت به زمان در fixed

(10) $$v_f \equiv \dot{r}'_f \equiv \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{fixed}$$

$$v_r \equiv \dot{r}_r \equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating}$$ سرعت نسبت به دستگاه چرخان

$$V \equiv \dot{R}_f \equiv \left(\frac{dR}{dt}\right)_{fixed}$$ سرعت خطی مبداء در حال حرکت

$\omega$ : سرعت زاویه‌ای

در نتیجه خواهیم داشت:

(11) $$\vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

ادامه منطق این درس برای شتاب در دستگاه چرخان، قانون دوم نیوتن است!

رابطه $\vec{F} = m\vec{a}$ در دستگاه لخت برقرار است. از این رو خواهیم داشت:

$$(12) \qquad \vec{F} = m\underbrace{\vec{a}_f}_{\text{شتاب در دستگاه fixed}} = m\left(\frac{dV_f}{dt}\right)_{fixed}$$

این بدین معنا است که از رابطه (11) باید نسبت به دستگاه f مشتق بگیریم.

$$(13) \qquad \frac{d\vec{V}_f}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{fixed}}_{\ddot{\vec{R}}_f \equiv \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_f} + \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{fixed} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fixed}$$

ترم دوم و چهارم را که مشتق یک کمیت تعریف شده در دستگاه چرخان نسبت به دستگاه ثابت است را با استفاده از رابطه (6) باید به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$(14) \qquad \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{fixed} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{rotating} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \underbrace{\vec{a}_r}_{\text{شتاب در دستگاه چرخان}} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r$$

به طور مشابه برای ترم چهارم خواهیم داشت.

$$\vec{w} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fixed} = \vec{w} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \tag{15}$$

بردار $\vec{r}$ در دستگاه چرخان توصیف شده است در نتیجه از رابطه 6 استفاده خواهیم کرد.

$$= \vec{w} \times \vec{v}_r + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

حال با ترکیب تمام جملات فوق می‌توانیم $\vec{F} = m\vec{a}_f$ را به طور کامل بنویسیم.

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\ddot{\vec{R}}_f + m\vec{a}_r + m\dot{\vec{w}} \times \vec{r} + m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) + 2m\vec{w} \times \vec{v}_r \tag{16}$$

حال جالب است که اگر فرض کنیم که ناظر در دستگاه چرخان بخواهد نیروی موثر را اندازه‌گیری کند خواهیم داشت.

$$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_r = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{w}} \times \vec{r} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - 2m\vec{w} \times \vec{v}_r \tag{17}$$

$\vec{F}$: جمع تمام نیروهای وارد بر ذره در دستگاه ثابت است.

$m\ddot{\vec{R}}_f$: شتاب خطی دستگاه چرخان

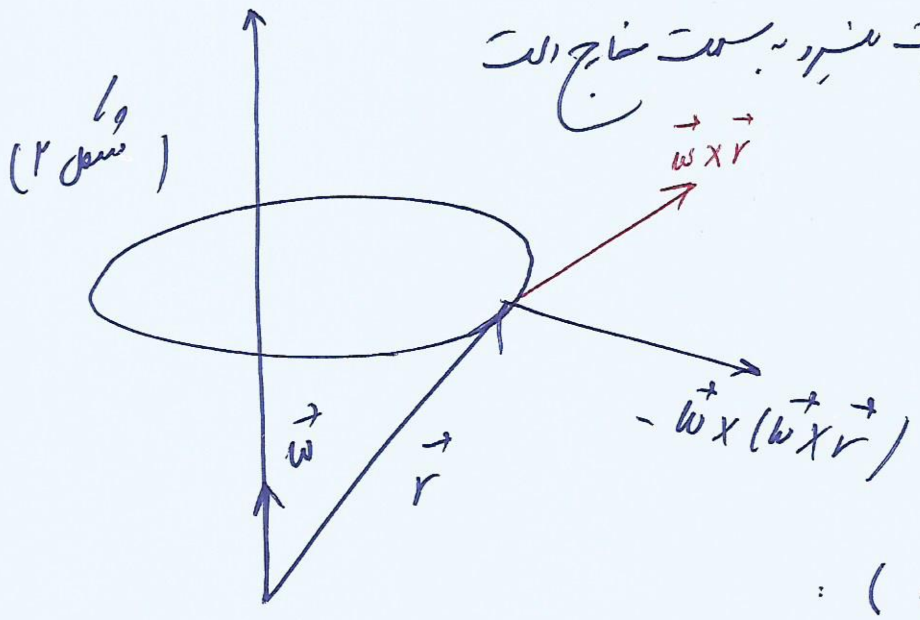
$m\dot{\vec{w}} \times \vec{r}$: شتاب زاویه‌ای دستگاه چرخان

$m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$: centrifugal force — شتاب جانب مرکز

$2m\vec{w} \times \vec{v}_r$: Coriolis force.

در صورتی که $\vec{\omega}$ عمود بر بردار $\vec{r}$ باشد، ترم معروف $m\omega^2 r$ به دست می‌آید.

مجددا جهت منفی به این معنی است که جهت نیرو به سمت خارج است




اگر در مختصات استوانه‌ای باشیم

شعاعی $\vec{r} = r\hat{e}_\rho$

در جهت $z$ $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$

مختصات استوانه‌ای: $(\rho, \varphi, z)$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega r \times \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega\hat{e}_z \, \omega r \times \hat{e}_\varphi = \underbrace{-}_{\text{در جهت داخل}}\omega^2 r\,\hat{e}_\rho \qquad (18)$$

$$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) : +\hat{e}_\rho$$ به سمت بیرون

ترم آخر جمله جدیدی است که به آن نیروی کوریولیس گویند. باید توجه داشت که نیروی جانب به مرکز و نیروی کوریولیس به دلیل انتخاب دستگاه چرخان ایجاد شد.

این نیروهای جدید به دلیل درخواست نوشتن قانون دوم نیوتن در دستگاه چرخان ایجاد شد.

نیروی واقعی: $ma_f$ ، قانون دوم نیوتن در دستگاه ثابت

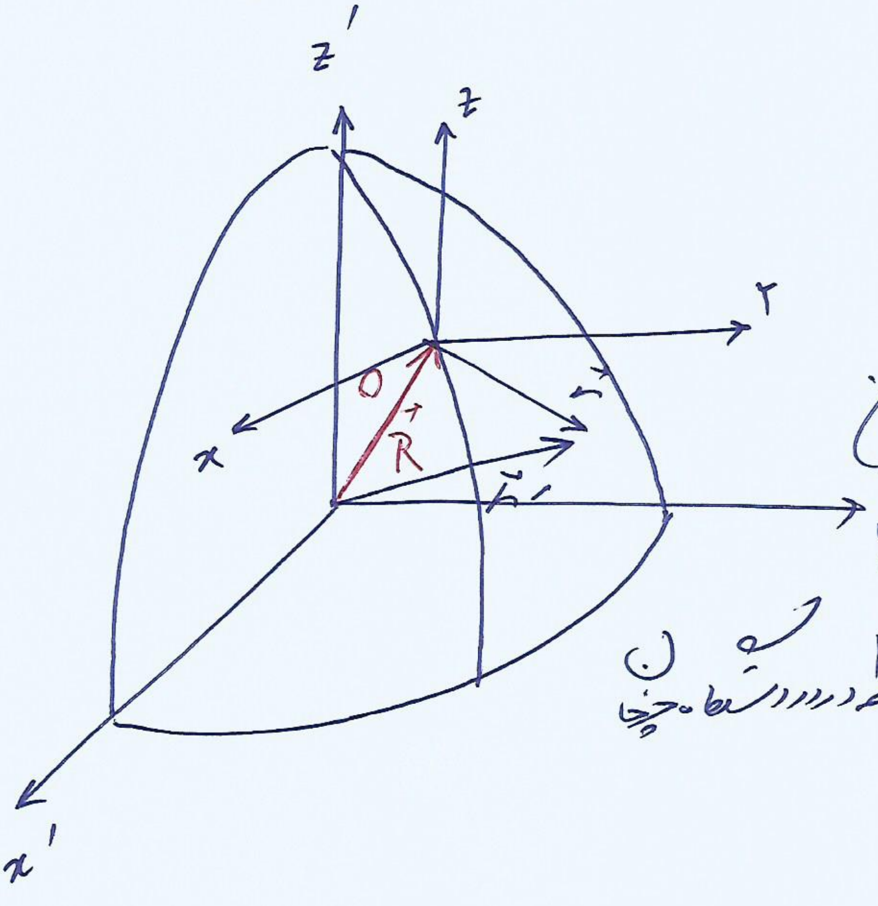
$$(19)\begin{cases} F = m a_f \\ F_{eff} = m a_r \\ F_{eff} = m a_f + \left(\text{Noninertial terms}\right) \end{cases}$$

$a_r$: شتاب در دستگاه چرخان ، $F_{eff}$: ترکیبی از نیروی واقعی و نیروهای مختصات (نسبت به دستگاه چرخان)

# حرکت بر روی سطح زمین

اصلی ترین حرکت زمین، دوران حول محور چرخش خود است. در این راستا حرکت زمین به دور خورشید و حرکت منظومه شمسی حول کهکشان از مرتبه بعدی توجه است.

برای این بررسی دستگاه مختصات ثابت $x'y'z'$ را در مرکز زمین قرار دهیم و دستگاه چرخان را بر روی سطح زمین قرار دهیم.




شکل ۳)

zyx : دستگاه چرخان روی سطح زمین

$\vec{R}$ مختصه مرکز دستگاه چرخان

$\vec{r}'$ و $\vec{r}$ به ترتیب مختصه یک نقطه در دو دستگاه چرخان و زمین است.

در دستگاه fixed نیروها را در زمین به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\vec{F} = \vec{S} + m\vec{g}_0 \qquad (20)$$

که $\vec{S}$ جمع تمام نیروهای خارجی است. $m\vec{g}_0$ هم مربوط به نیروی گرانش زمین است.

که $\vec{g}$ میدان گرانش زمین است.

$$\vec{g}_0 = -G\frac{M_E}{R_\oplus^2}\,\hat{e}_R \qquad (21)$$

که $M_E$ جرم زمین و $R_\oplus$ شعاع زمین است. $\hat{e}_R$ بردار واحد در جهت $\vec{R}$ است.

فرض شده که زمین با تقریب بسیار خوبی کروی و همسانگرد است.

نیروی موثر وارد بر ذره در دستگاه چرخان به صورت زیر است.

$$\vec{F}_{eff} = \vec{S} + m\vec{g}_0 - m\ddot{\vec{R}}_f - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r \qquad (22)$$

سرعت زاویه در جهت $z'$ و $\hat{e}_z$ انتخاب شده است. سرعت زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\omega_\oplus = \frac{2\pi}{24\times60\times60} \simeq 7.3\times10^{-5}\ \mathrm{rad/s} \qquad (23)$$

این سرعت 365 بار بزرگتر از سرعت چرخش زمین به دور خورشید است.

سرعت چرخش زمین تقریبا ثابت در نظر گرفته می‌شود در نتیجه $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ قابل اغماض است.

از طرف دیگر چون $\vec{R}$ شعاع زمین تغییرات آن در دستگاه چرخان صفر است.

در نتیجه

$$\ddot{\vec{R}}_f = \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}}_f + \frac{d}{dt}\dot{\vec{R}}_{Rotating} \qquad (24)$$

$$\ddot{\vec{R}}_f = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

در نتیجه رابطه نیروی مؤثر در دستگاه چرخان برابر خواهد بود با

$$\vec{F}_{eff} = \vec{S} + m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}] - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{S} + m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})] - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r \qquad (25)$$

شتاب جاذبه زمین را به طور مؤثر به صورت ترکیب ترم دوم و سوم بر روی سطح زمین اندازه گیری می کنند

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \underbrace{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})]}_{\text{نیروی جانب به مرکز}} \qquad (26)$$

در آزمایش هایی که نزدیک زمین انجام می شود می توان $r \ll R$ فرض کرد. اگر آزمایش ها را در ارتفاع بالاتر از سطح زمین ترتیب می دهیم، علاوه بر تغییرات $\vec{g}_0$ برحسب ارتفاع باید تأثیر $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ را نیز در نظر بگیریم. به دلیل نیروی جانب به مرکز زمین تخت شدگی دارد. "Oblateness"، این تخت شدگی از مرتبه $21\,km$ است در استوا، قطر استوا به این اندازه بزرگتر از قطب ها است و شتاب جاذبه در قطب ها از مرتبه $0.052\, m/s^2$ بزرگتر از استوا است.

در ادامه این فصل مسئله بسیار هیجان انگیزی را بررسی خواهیم کرد.

پایان درس