۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال تحصیلی ۹۹/۹۸ دوم

مسئله عمومی نوسانگرهای جفت شده

فرض کنید که n-نوسانگر با مختصه تعمیم یافته q_k ؛ $k = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم

به قسمی که این نوسانگرها کوپل باشند ولی در شرایط اولیه تعادل باشند.

$$\dot{q}_k = 0 \qquad \ddot{q}_k = 0 \qquad K = 1, 2, \dots, n$$

(1) $$q_k = q_{k0}$$

در نقطه تعادل

جملات $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ حتماً شامل $\dot{q}_k$ و $\ddot{q}_k$ خواهد بود که در تعادل صفر است

در نتیجه

(2) $$\left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_0 = \left.\frac{\partial T}{\partial q_k}\right|_0 - \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 = 0$$

این جمله در تعادل حساب شده است.

فرض کنید که ارتباط بین مختصه دکارتی و تعمیم یافته مستقل از زمان باشد در نتیجه

(3) $$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j) \quad ; \quad q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

در نتیجه انرژی جنبشی تابع درجه ۲ از مختصه تعمیم یافته است.

(4) $$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k \qquad \text{"quadratic"}$$

اثبات رابطه 4 :

در مختصه دکارتی Cartesian. انرژی جنبشی به صورت زیر است.

$$(5)\quad T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^{2}$$

تعداد ذرات — تعداد بعد فضا

تبدیل مختصه به qها

$$(6)\quad x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \qquad j = 1, 2, \dots, s$$

$$(7)\quad \dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

$$(8)\quad \dot{x}_{\alpha,i}^{2} = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j$$

$$(9)\quad + \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^{2}$$

در نتیجه

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j} b_j \dot{q}_j + c$$

که

$$a_{jk} = \sum_{i,\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} ; \quad b_j \equiv \sum_{i,\alpha} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

(10) $$c = \sum_{\alpha} \sum_{i} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2$$

اگر ارتباط بین مختصه دکارتی و تعمیم یافته مستقل از زمان باشد

$\partial x_{\alpha,i} / \partial t = 0$

"Scleronomic condition"

$C = 0 \quad , \quad b = 0$

در نتیجه

Kinetic energy is Homogenous quadratic function of generalized velocities

(11) $$T = \sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

در نتیجه $\left. \frac{\partial T}{\partial q_k} \right|_0 = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$

حال با توجه به رابطه (2) داریم.

(12) $$\left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_0 = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

از آن جایی که پتانسیل در نقطه تعادل تعریف شده است می‌توان پتانسیل را بسط تیلور داد.

(13) $$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = U_0 + \sum_k \left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{jk} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_j q_k + \cdots$$

ترم مذکور با استدلال فوق صفر است.

با انتخاب دستگاه مختصات می‌توان U_0 را صفر کرد. حال اگر جابه‌جایی از نقطه تعادل کوچک باشد می‌توان ترم‌های بالاتر را صرف‌نظر کرد.

درنتیجه با تعریف تانسورهای ترکیبی می‌توان مسئله را بازنویسی کرد.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk}\, q_j\, q_k \qquad (14)$$

که $A_{jk} \equiv \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_j\, \partial q_k}\right|_0$ اگر U مشتق‌پذیر باشد نسبت به ترتیب مشتق متقارن بوده و $A_{jk} = A_{kj}$

$T \geq 0$, $U \geq 0$ positive definite. درنتیجه فرم کلی انرژی جنبشی و پتانسیل برابر است با

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{jk} m_{jk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k \\[2ex] U = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{jk} A_{jk}\, q_j\, q_k \end{cases} \qquad (15)$$

که

$$m_{jk} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \qquad (16)$$

رابطه (16) نشان می‌دهد که $x_{\alpha,i}$ تابعی از q هاست. A_{jk} ، m_{jk} ماتریس‌های $n\times n$ است.

جالب این که اگر ماتریس m_{rs} قطری باشد، بدین معنا است که انرژی جنبشی را می‌توان به صورت $T = \frac{1}{2} \sum_r m_r \dot{q}_r^2$ نوشت، سیستم وابستگی بین ترم‌های متفاوت نیست.

اگر تبدیل مختصاتی را درنظر بگیریم که A_{jk} را نیز همزمان قطری کند در این صورت نوسانگرها واجفتیده می‌شوند.

به چنین دستگاه مختصاتی که مولفه‌ها را از یکدیگر جدا می‌کند. مختصات بهنجار یا Normal Coordinate گویند. معادلات حرکت را می‌توانیم از معادله اویلر-لاگرانژ به دست بیاوریم.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (17)$$

از آنجایی که انرژی جنبشی فقط تابعی از سرعت تعمیم یافته است، و انرژی پتانسیل تابعی از مختصه تعمیم یافته، معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (18)$$

با توجه به معادله (15) خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_j A_{jk}\, q_j \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{jk}\, \dot{q}_j \end{cases} \qquad (19)$$

در نتیجه معادله حرکت به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_j \left(A_{jk}\, q_j + m_{jk}\, \ddot{q}_j \right) = 0 \qquad (20)$$

n معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دو همگن است. از آن جایی که مجدد با شکل آشنای معادلات نوسانگر سر و کار داریم پس جواب

$$q_j(t) = a_j\, e^{i(\omega t - \delta)} \qquad (21)$$

دامنه حقیقی

فاز

a_j و δ دو درجه آزادی برای توضیح درجات آزادی است. این انتخاب معادل است با

انتخاب $x(t) = Be^{i\omega t}$ و B مختلط که در درس نامه قبل کار کردیم.

موهومی

$e^{-\omega_i t}$, $e^{\omega_i t}$

نکته: فرکانس باید حقیقی باشد. زیرا در صورت داشتن بخش موهومی ترم های از جنس خواهیم داشت که پایستگی انرژی را نقض خواهند کرد.

در نتیجه

$$\sum_j \left(A_{jk} - \omega^2 m_{jk}\right) a_j = 0 \qquad (22)$$

که ترم مشترک $e^{i(\omega t - \delta)}$ فاکتور گرفته شده است. برای جواب غیر بدیهی باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود.

$$\left|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}\right| = 0 \qquad (23)$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 m_{11} & A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{13} - \omega^2 m_{13} & \cdots \\ A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{22} - \omega^2 m_{22} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & \cdots \\ A_{13} - \omega^2 m_{13} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & A_{33} - \omega^2 m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = 0 \qquad (24)$$

توجه داشته باشید که A_{jk} و m_{jk} متقارن است. معادله به دست آمده از این دترمینان را

secular equation یا charactristic equation می‌گویند

ω_r: جواب این معادله را فرکانس ویژه، charactristic frequency،

eigen-frequency سیستم است.

$r = 1, 2, \dots, n$

در این حل ممکن است، فرکانس های تکراری داشته باشیم که در این صورت تبهگنی degeneracy

داریم. a_r . $r = 1, 2, \dots, n$ ویژه بردارهای مشخصه است. نسبت

$a_1 : a_2 : \dots : a_n$ نسبت ویژه بردارها را به دست می دهد.

a_{jr} : jth-component of r-th eigenvector

- مولفه j-ام ویژه بردار r

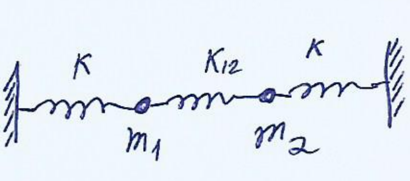
به دلیل اصل برهم نهی جواب کلی به صورت زیر خواهد بود.

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} \tag{25}$$

از آن جایی که فقط قسمت حقیقی جواب مورد نظر است داریم.

$$q_j(t) = Re \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r a_{jr} \cos(\omega_r t - \delta_r) \tag{26}$$

اکنون زمان مناسبی است که مثال جلسه قبل را به روش دیگر حل کنیم



$$U = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K_{12} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2} (K + K_{12}) x_1^2 + \frac{1}{2} (K + K_{12}) x_2^2 - K_{12} x_1 x_2$$

ترم $K_{12} x_1 x_2$ ترم اندرکنشی است. اکنون می توانیم ماتریس A_{jk} را به شکل زیر

تشکیل دهیم.

$$(28)\quad \begin{cases} A_{11} = \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0 = K + K_{12} \\[2ex] A_{12} = \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0 = -K_{12} = A_{21} \\[2ex] A_{22} = \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0 = K + K_{12} \end{cases}$$

انرژی جنبشی نیز به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(29)\quad T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2$$

حال با توجه به تعریف $T = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k$ و مقایسه با رابطه (30)

$$(30)\quad \begin{cases} m_{11} = m_{22} = M \\ m_{12} = m_{21} = 0 \end{cases}$$

حال با توجه به

$$(31)\quad \sum_j (A_{jk} - w^2 m_{jk}) a_j = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} K + K_{12} - Mw^2 & -K_{12} \\ -K_{12} & K + K_{12} - Mw^2 \end{vmatrix} = 0$$

درنتیجه دقیقا همان رابطه‌ای است که در درس نامه هم به دست آورده بودیم.

$$(32)\quad w = \sqrt{\frac{K + K_{12} \pm K_{12}}{M}} \rightarrow \text{eigen frequencies} \begin{cases} w_1 = \sqrt{\dfrac{K + 2K_{12}}{M}} \\[2ex] w_2 = \sqrt{K/M} \end{cases}$$

مختصه هنجار "Normal Cordinates"

جواب نوسانگرهای کوپل شده به صورت زیر در نظر بگیریم

(33) $$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} \exp\left[i(\omega_r t - \delta_r)\right]$$

α_r ضریب مقیاس است. برای سادگی در notation کمیت β_r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(34) $$q_j(t) = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t}$$

β_r عامل مقیاس عددی است (مختلط). حال η_r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(35) $$\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t} \xrightarrow[\text{درنتیجه}]{} q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)$$

η_r مختصه‌ای است که با یک فرکانس نوسان می‌کند.

Normal Cordinate.

η_r در رابطه روبرو صدق می‌کند

(36) $$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

درنتیجه در این مختصه جواب‌ها (نوسانگرها) از هم جدا می‌شوند.

در ادامه می‌خواهیم رابطه $\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$ را از معادله اویلر-لاگرانژ بدست بیاوریم.

(37) $$q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t) \rightarrow \dot{q}_j = \sum_r a_{jr} \dot{\eta}_r$$

حال با توجه به تعریف انرژی جنبشی خواهیم

$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\Big(\sum_r a_{jr}\dot{\eta}_r\Big)\Big(\sum_s a_{ks}\dot{\eta}_s\Big) \tag{38}$$

جمع روی فرکانس ها

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\Big(\sum_{j,k} m_{jk}\,a_{jr}\,a_{ks}\Big)}_{\text{orthonormality Condition} \,=\, \delta_{rs}}\dot{\eta}_r\,\dot{\eta}_s$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\dot{\eta}_r\,\dot{\eta}_s\,\delta_{rs} = \frac{1}{2}\sum_r \dot{\eta}_r^2 \tag{39}$$

حال برای انرژی پتانسیل داریم

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}\,q_j\,q_k \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\Big(\sum_{j,k} A_{jk}\,a_{jr}\,a_{ks}\Big)}_{\text{این ترم احتیاج به محاسبه دارد}}\eta_r\,\eta_s$$

---

(41) Note: $\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk})\,a_j = 0$

با استفاده از این رابطه

با نوشتن فرکانس s-ام

(42)

$$\begin{cases} \omega_s^2 \sum_k m_{jk}\,a_{ks} = \sum_k A_{jk}\,a_{ks} \\ \omega_r^2 \sum_j m_{jk}\,a_{jr} = \sum_j A_{jk}\,a_{jr} \end{cases}$$

و رابطه نوشتن فرکانس r-ام

درنتیجه

$$(43)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_j \left(\omega_s^2 \sum_k m_{jk}\, a_{ks} = \sum_k A_{jk}\, a_{ks}\right) a_{jr} \\ \displaystyle\sum_k \left(\omega_r^2 \sum_j m_{jk}\, a_{jr} = \sum_j A_{jk}\, a_{jr}\right) a_{ks} \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} \displaystyle\omega_s^2 \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = \sum_{j,k} A_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} \\ \displaystyle\omega_r^2 \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = \sum_{j,k} A_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} \end{cases}$$

با برابری سمت راست معادلات این نتیجه مهم را داریم که

$$(45)\quad (\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = 0$$

$$\text{for} \quad \omega_r \neq \omega_s \;\rightarrow\; \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks} = 0$$

که orthonormality را بعداً نشان خواهیم داد.

درنتیجه انرژی پتانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(46)\quad U = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \omega_s^2\, \eta_r\, \eta_s\, \delta_{rs} = \frac{1}{2} \sum_r \omega_r^2\, \eta_r^2$$

حال با ترکیب انرژی جنبشی از روابط (39) و انرژی پتانسیل (46) خواهیم داشت.

$$L = \frac{1}{2} \sum_r \left(\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2 \right) \tag{47}$$

و با استفاده از معادله اویلر - لاگرانژ

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_r} = 0 \rightarrow \ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0 \tag{48}$$

پس اگر در نقطه تعادل باشیم $\{m\}$, $\{A\}$ هر دو قطری خواهند شد

German Mathematician Karl Weierstrass (1815–1897)

1858 – the idea of a normal coordinate.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) Alma mater: University of Gottingen.

↓

Christoph Gudermann (1798–1852) Gottingen, University of Münster

↓

K. Weierstrass. Techniche Universität Berlin

↓

Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)