- نوسانگرهای جفت شده "Coupled Oscillations"

در این فصل به بررسی سیستم های نوسانی جفت شده می پردازیم. هدف اصلی این است که حرکت این سیستم ها را برحسب مختصه های نرمال "normal coordinate" بیان کنیم.

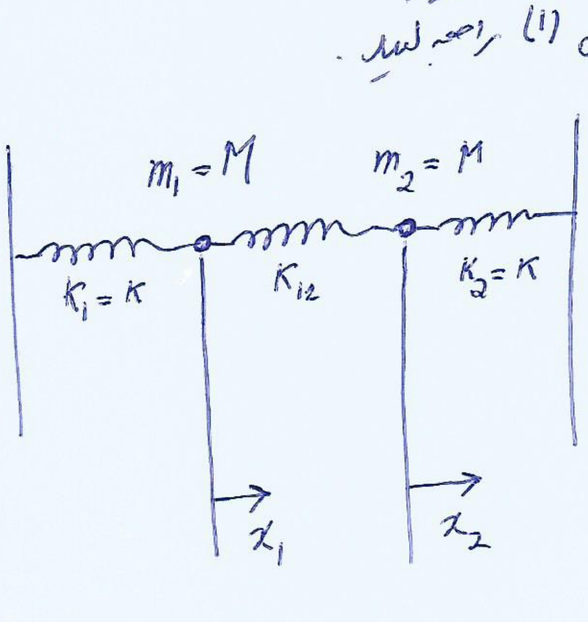
منظور از مختصه های نرمال این است که حرکت را به مجموع حرکت های بازگشتی مجزا و مشخص توصیف کنیم. یکی از پیشگامان این بحث Daniel Bernoulli (1700-1782) بوده است همچنین Lagrange (1762-1765) در این مورد نوشته دارد.

اگر در سیستم جفت شده یکی از مدها تحریک (Excited) شود، آن Normal Modes است. ولی در اصل حرکت ترکیب پیچیده‌ای از مدهای نرمال است.

□ دو نوسانگر هارمونیک جفت شده

نوسانگرها کوپل شده مدل مناسبی برای شروع بررسی سیستم ها مولکولی/اتمی است.

برای مسئله اول به شکل (۱) مراجعه کنید.



شکل (۱

سیستم دو جرمی که فقط در راستای x دینامیک دارد، دارای ۲ درجه آزادی است.

اگر m_1 و m_2 از موقعیت تعادل خارج شوند، نیروی وارد برابر است با

m_1 نیروی وارد بر : $-kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2)$ (1)

m_2 نیروی وارد بر : $-kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1)$ (2)

در نتیجه معادله حرکت برابر خواهد بود با

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \\ M\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M\ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12})x_1 - k_{12}x = 0 & (3) \\ M\ddot{x}_2 + (k + k_{12})x_2 - k_{12}x = 0 & (4) \end{cases}$$

برای حل این مجموعه کوپل شده، از حدس خردمندانه ansatz زیر استفاده می‌کنیم.

$$(5) \quad \begin{cases} x_1(t) = B_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) = B_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

هدف محاسبه ω و B_1، B_2 است. B_1 و B_2 موهومی هستند که شامل دامنه و فاز است.

می‌توانستیم حدس را به صورت $x(t) = |B|\cos(\omega t - \delta)$ یا $x(t) = |B| e^{i(\omega t - \delta)}$ بنویسیم ...

که در روابط فوق $|B|$ حقیقی است.

در هر حال جواب نهایی باید حقیقی باشد. با جایگذاری حدس (5) در روابط (3)، (4) خواهیم داشت:

$$(7) \quad \begin{cases} -M\omega^2 B_1 e^{i\omega t} + (k + k_{12})B_1 e^{i\omega t} - k_{12} B_2 e^{i\omega t} = 0 \\ -M\omega^2 B_2 e^{i\omega t} + (k + k_{12})B_2 e^{i\omega t} - k_{12} B_1 e^{i\omega t} = 0 \end{cases}$$

با فاکتور گیری لازم $e^{i\omega t}$ خواهیم داشت

(8)
$$\begin{cases} (k + k_{12} - M\omega^2) B_1 - k_{12} B_2 = 0 \\ -k_{12} B_1 + (k + k_{12} - M\omega^2) B_2 = 0 \end{cases}$$

برای جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار می دهیم.

(9)
$$\begin{vmatrix} k + k_{12} - M\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

(10) seculiar determinant $(k + k_{12} - M\omega^2)^2 - k_{12}^2 = 0$

درنتیجه $\longrightarrow$ $k + k_{12} - M\omega^2 = \pm k_{12}$

جواب برای فرکانس ω خواهیم داشت

(11)
$$\omega = \sqrt{\frac{k + k_{12} \pm k_{12}}{M}}$$

(eigen frequencies) Charactristic frequencies

درنتیجه، دو فرکانس مشخصه خواهیم داشت.

(12)
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{M}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{k/M}$$

فرکانس یک

فرکانس دوم

4/

در نتیجه جواب را می توان به شکل زیر نوشت :

exp مربوط به علامت

(13)

الف)
$$x_1(t) = B_{11}^{+} e^{+i\omega_1 t} + B_{11}^{-} e^{-i\omega_1 t} + B_{12}^{+} e^{i\omega_2 t} + B_{12}^{-} e^{-i\omega_2 t}$$

مربوط به ذره 1

مربوط به فرکانس ω_1

ب)
$$x_2(t) = B_{21}^{+} e^{+i\omega_1 t} + B_{21}^{-} e^{-i\omega_1 t} + B_{22}^{+} e^{i\omega_2 t} + B_{22}^{-} e^{-i\omega_2 t}$$

مربوط به ذره 2

مربوط به فرکانس ω_1

exp مربوط به علامت

البته تمام ضرایب مستقل نیستند.

14/

$$(k + k_{12} - M\omega^2) B_1 - k_{12} B_2 = 0$$

$$\xrightarrow{\omega = \omega_1}$$

$$\begin{cases} B_1 \to B_{11} \\ B_2 \to B_{21} \\ \omega_1^2 = \dfrac{k + 2k_{12}}{M} \end{cases}$$

در نتیجه : $(k + k_{12} - k - 2k_{12}) B_{11} - k_{12} B_2 = 0$

$$\boxed{B_{11} = -B_{21}}$$

به طور مشابه
$$\boxed{B_{12} = B_{22}}$$

در نتیجه تنها ضرایب مستقل عبارتند از ضرایب مربوط به فرکانس مشخصه یا "eigen frequency" است.

از این رو :

الف)
$$X_1(t) = B_1^{+} e^{+i\omega_1 t} + B_1^{-} e^{-i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t}$$

15/

$$X_2(t) = -B_1^{+} e^{i\omega_1 t} - B_1^{-} e^{-i\omega_1 t} + B_2^{+} e^{i\omega_2 t} + B_2^{-} e^{-i\omega_2 t}$$

ب)

از این رو ۴ پارامتر آزاد داریم که سازگار است با ۲ ذره که هر کدام که دینامیک آن ها با معادله دیفرانسیل درجه ۲ داده می شود

تغییر متغیرهای مناسب می تواند مدهای نوسانی را از یکدیگر جدا کند.

ansatz:

$$(16)\quad \begin{cases} \eta_1 \equiv x_1 - x_2 \\ \eta_2 \equiv x_1 + x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت

$$(17)\quad \begin{cases} M\ddot{x}_1 + (k + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + (k + k_{12})x_2 - k_{12}x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k + k_{12})(\eta_1 + \eta_2) - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) = 0 \\ M(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (k + k_{12})(\eta_2 - \eta_1) - k_{12}(\eta_1 + \eta_2) = 0 \end{cases}$$

در نتیجه

$$(18)\quad \begin{cases} \text{الف} & M(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k + 2k_{12})\eta_1 + k\eta_2 = 0 \\ \text{ب} & M(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) + (k + 2k_{12})\eta_1 - k\eta_2 = 0 \end{cases}$$

که با جمع و کم کردن دو رابطه (۱۸-الف) , (۱۸-ب) خواهیم داشت.

$$
(19)\quad \begin{cases} M\ddot{\eta}_1 + (k+2k_{12})\eta_1 = 0 & \text{(الف)} \\ M\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0 & \text{(ب)} \end{cases}
$$

نکته جالب این است که هم اکنون دو مُد η_1 و η_2 واجفتیده شده‌اند و هرکدام با فرکانس مشخصه خود نوسان می‌کنند. جواب این معادلات دیفرانسیل برابر است با:

exp مربوط به علامت

الف) $$\eta_1(t) = C_1^{+} e^{+i\omega_1 t} + C_1^{-} e^{-i\omega t} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{M}}$$

مربوط به ذره 1

(20)

ب) $$\eta_2(t) = C_2^{+} e^{+i\omega_2 t} + C_2^{-} e^{-i\omega t} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

از این رو η_1، η_2 را مختصه‌های بهنجار شده normal Cordinate می‌گویند.

در ادامه یک روش سیستماتیک‌تری را برای به دست آوردن مُدهای نرمال معرفی کنیم.

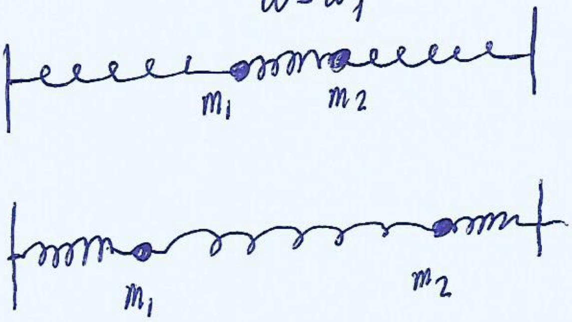
حال برای یک مسئله شرایط اولیه را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$
(21)\quad \begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \end{cases} \longrightarrow \eta_2(0) = 0 \;;\quad \dot{\eta}_2(0) = 0
$$

این شرایط اولیه باعث می‌شود که $C_2^{+} = C_2^{-} = 0$

حرکت $\eta_2 = 0$ مطابق شکل است.

$$\omega = \omega_1$$



(شکل 2)

Anti-Symmetric mode

(Out of phase)

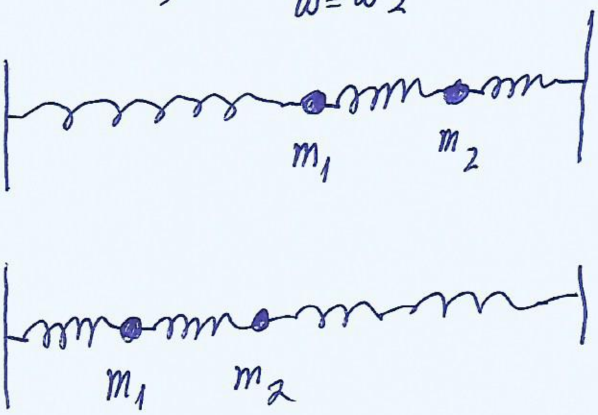
در این حرکت فرکانس $\sqrt{\frac{k+2k_{12}}{M}} = \omega_1$ است و خارج فاز، یعنی غیرمتقارن نوسان می‌کنند.

حال اگر شرایط اولیه را به صورت زیر انتخاب کنیم، حرکت متقارن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \end{cases} \Rightarrow \eta_1(0) = 0 \rightarrow \dot{\eta}_1(0) = 0 \qquad (22)$$

در نتیجه $C_1^+ = C_1^- = 0$ و به شکل (3) توجه کنید.

$$\omega = \omega_2$$



(شکل 3)

Symmetric mode

(in phase)

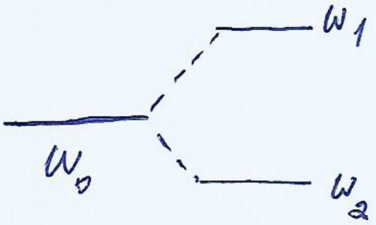
این حرکت خاص با فرکانس $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ ، متقارن، symmetrical است

و حرکت هم فاز است in phase است.

این نتیجه که مدها نامتقارن فرکانس بالاتری دارند، نتیجه کلی تری است. حتی در سیستم های جفت شده پیچیده نیز این شرط برقرار است. هرچقدر تقارن سیستم بیشتر باشد، پیچیدگی آن کمتر، و فرکانس آن نیز کمتر است.

نکته جالب اگر جرم m_2 یا m_1 را ثابت نگه داریم فرکانس طبیعی برابر خواهد بود با $\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$

این بدین معنا است که کوپلاژ فرکانس های سیستم را افزایش می دهد به شکلی که



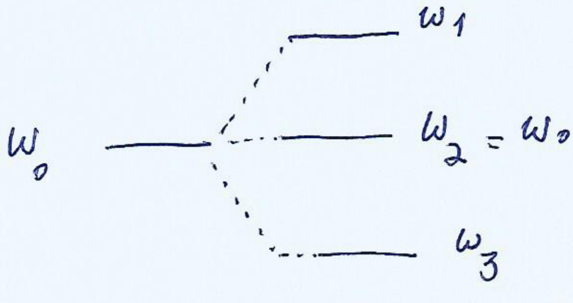
$\omega_1 > \omega_0 > \omega_2$

(رابطه 23 - 1 شکل 4)

نتیجه کلی نیز صحیح است اگر n (زوج) نوسانگر همانند داشته باشیم $n/2$ فرکانس بالاتر از ω_0 و $n/2$ فرکانس کمتر خواهد داشت.

در صورتی که تعداد نوسانگرهای کوپل شده فرد باشد یکی از فرکانس ها ω_0 خواهد بود و مابقی $n-1$ به صورت متقارن به دو قسمت تقسیم می شوند.

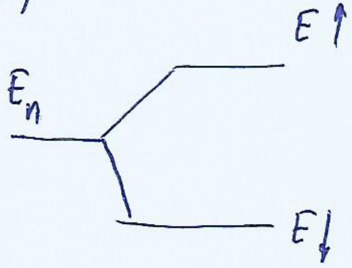
(شکل ل) $n=3$



در اثر زیمان Pieter Zeeman (1865-1943) که توسط فیزیکدان هلندی فرمولبندی شد.

طیف اتم هیدروژن به دلیل قرار گرفتن در میدان مغناطیسی باز می‌شود.

(شکل 2)



برای این بررسی احتیاج به دانش مکانیک کوانتومی است

اگر هامیلتونی اتم را در میدان مغناطیسی بنویسیم

(رابطه 24) $$H = H_0 + V_M$$

H_0: هامیلتونی مختل نشده اتم

V_M: ترم اضافی به خاطر میدان مغناطیسی

که $V_M = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ که $\vec{\mu}$ ممان مغناطیسی است که دو سهم هسته‌ای و الکترونیکی (الکترون)

که ترم اختلال

$\vec{B}$: میدان مغناطیسی

دارد، ترم هسته‌ای قابل صرف نظر است. از این رو

(25) $$\vec{\mu} \approx -\frac{\mu_B\, g\, \vec{J}}{\hbar}$$

μ_B : Bohr magneton ، $\vec{J}$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل الکترون است. g ضریب

لانده است Landé g-factor است.

(26) $$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \simeq 9.274 \times 10^{-24} \text{ Joule. Tesla}^{-1}$$

اگر دقیق‌تر به این داستان نظر بیفکنیم

(27) $$\vec{\mu} = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left(g_l \vec{L} + g_s \vec{S} \right)$$

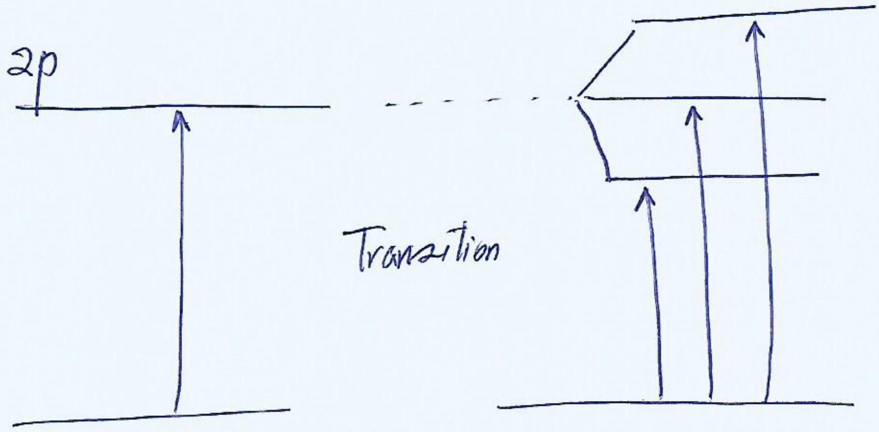
اندازه حرکت زاویه ای مداری الکترون

اندازه حرکت زاویه ای اسپین

$g_l = 1$ $\qquad$ $g_s \simeq 2.0023192$

(anomalous gyromagnetic ratio) prediction of Quantum electrodynamics...

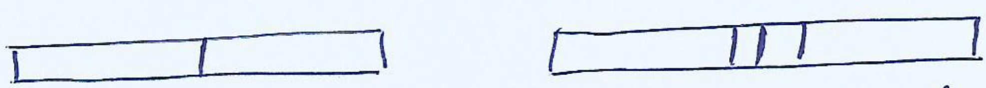
(شکل 7)



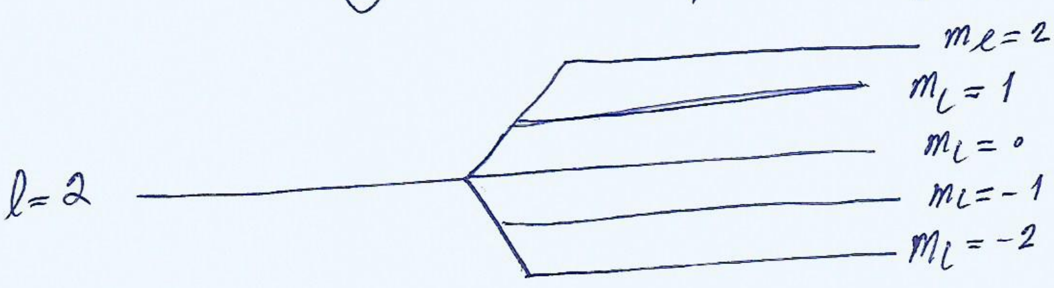
energy levels

$l = 1$

$2\times1+1 = m$



No magnetic field / Magnetic field



$2\times2+1 = 5$

$2\times1+1 = 3$

□ سیستم های با جفت شدگی ضعیف Weak Coupling

حالت های جالب توجه در شرایطی که کوپل‌فنرها ضعیف است رخ می‌دهد، این ضعیف بودن را می‌توان به شکل زیر کمی کرد که $K_{12} \ll K$ در این صورت فرکانس های نوسان تبدیل خواهد شد به

$$\begin{cases} \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{M}} = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \left(1 + \dfrac{2k_{12}}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (28)$$

اگر نسبت $\epsilon \equiv \dfrac{K_{12}}{2k} \ll 1$ را تعریف کنیم و با فرض کوچک ϵ خواهیم داشت

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \left(1 + 4\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \cong \sqrt{\frac{K}{M}} \left(1 + 2\varepsilon\right) \quad (29)$$

فرکانس طبیعی natural frequency که با شرط عدم اتصال به دست می‌آید برابر است با

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{M}} \cong \sqrt{\frac{K}{M}} \left(1 + \varepsilon\right) \quad (30)$$

در نتیجه $\sqrt{\dfrac{k}{M}} \cong \omega_0 (1 - \varepsilon)$ از این رو

$$\text{الف}\begin{cases} \omega_1 \cong \sqrt{\dfrac{k}{M}} \left(1 + 2\varepsilon\right) \cong \omega_0 (1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon) \\ \rightarrow \quad \omega_1 \cong \omega_0 (1 + \varepsilon) \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{ب}\begin{cases} \omega_2 \cong \sqrt{\dfrac{k}{M}} \cong \omega_0 (1 - \varepsilon) \end{cases}$$

حال می‌توان حرکتی را بررسی کرد که شرایط اولیه به صورت زیر مشخص شده باشد.

(32) $$x_1(0) = D \quad , \quad x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

با جایگذاری در راه حل کلی خواهیم داشت

از این رو $B_1^+ = B_1^- = B_2^+ = B_2^- = D/4$

(33) $$x_1(t) = \frac{D}{4}\left[\left(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}\right) + \left(e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}\right)\right]$$

$$= \frac{D}{2}\left[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right]$$

$$= D\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

که حالت جالب توجه

در نتیجه $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \varepsilon\omega_0 \; / \; \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega_0$

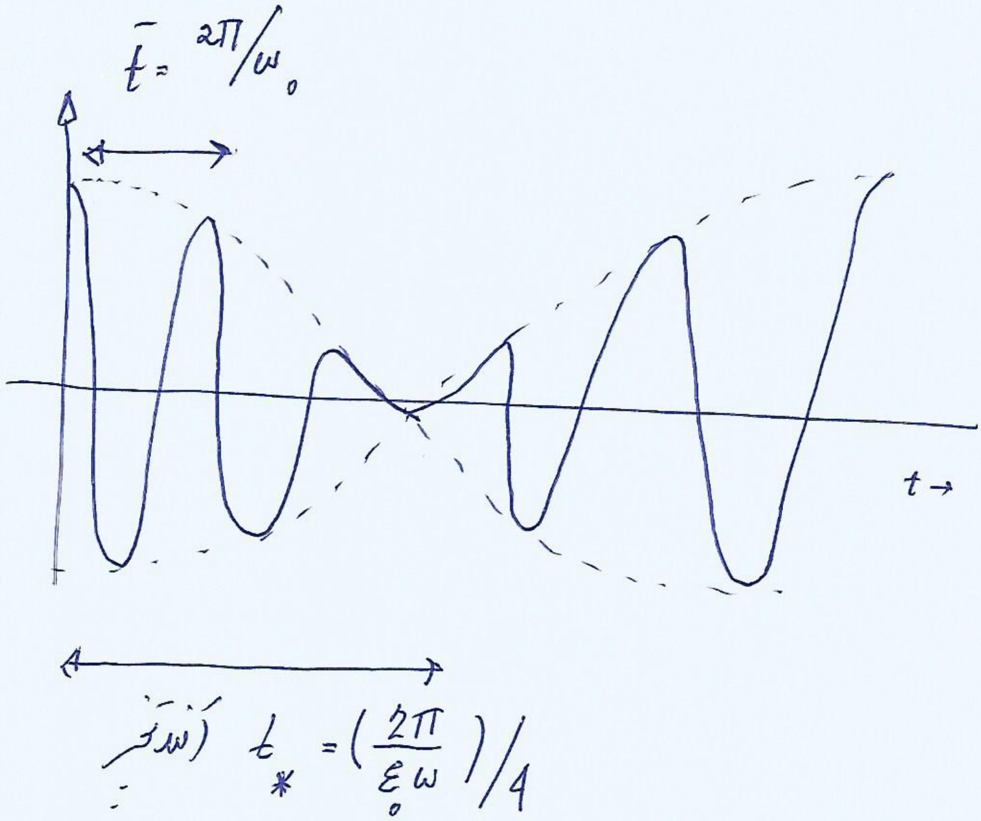
(34) $$x_1(t) = D\cos(\varepsilon\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

بطوریکه $$x_2(t) = D\sin(\varepsilon\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

از آن جایی که ε پارامتر کوچکی است که دامنه بسیار کند کاسته می‌شود و انرژی از نوسانگر 1 به نوسانگر 2 می‌رود. شکل‌های صفحه بعد گویا هستند.

شکل 8 الف

$x_1(t)$



شکل 8 ب

$x_2(t)$

این پدیده، پدیده معروف "beats" است

« پایان درس »