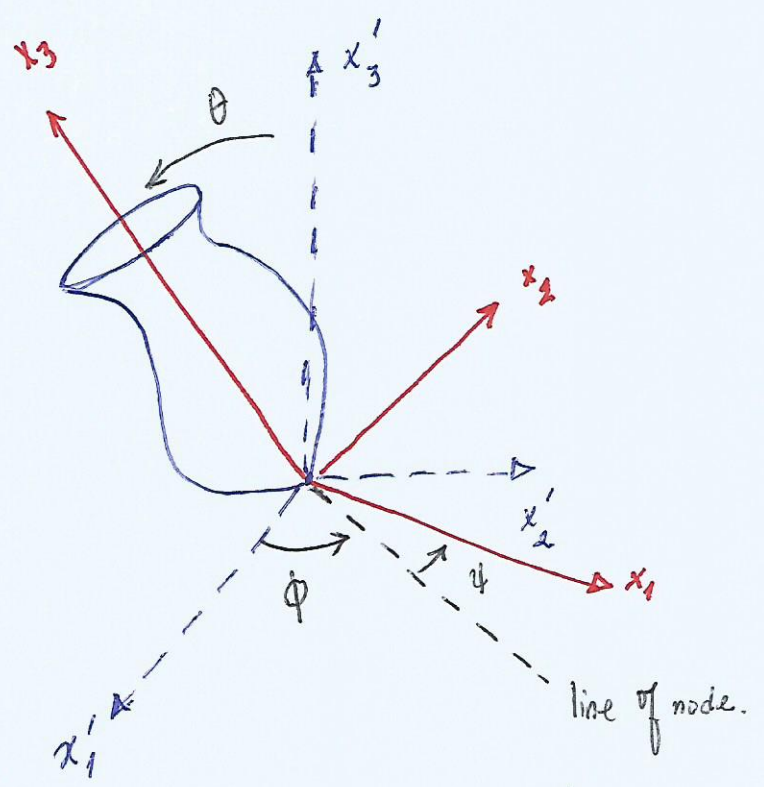


در حل تبدیل لگرانژی فرود متغایر با نقطه ثابت در حضور نیروی گزشتی را به صورت زیر می بینیم

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - Mgh \cos \theta$$



نقطه ۱ - جسم صلب فرود چرخان
 x'_i دستگاه مختصات ثابت
 x_i دستگاه مختصات متغیر

مقدار ثابت لگرانژی ϕ ، ψ همواره جزئی هستند در نتیجه نقطه تعادل یافته این momentum conjugate ثابت حرکت است.

$$(2) \quad P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = cte$$

$$(3) \quad P_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = cte$$

در حد قبل نشان دادیم ϕ ، ψ را می توان بر حسب ثابت های انرژی و زاویه θ نوشت:

$$(4) \quad \dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$(5) \quad \dot{\psi} = P_\psi / I_3 - \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

برای ادار اصل این شده دانستم که سیستم با یکبار است، در نتیجه انرژی سیستم ثابت حرکت است.

$$(6) \quad E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = cte$$

توجه داشته باشیم که $I_3 \omega_3^2$ ثابت است طبق روابط زیر.

$$(7) \quad \begin{cases} P_4 = I_3 \omega_3 = cte \rightarrow \omega_3 = P_4 / I_3 \\ I_3 \omega_3^2 = \frac{P_4^2}{I_3} = cte \end{cases}$$

در نتیجه علاوه بر $E = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ نیز ثابت حرکت است.

$$(8) \quad E' \equiv E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgh \cos \theta = cte$$

حال به جای $\dot{\phi}$ بر حسب ثابت های استاندارد $\frac{P_\phi - P_4 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ و حاصل می کنیم

$$(9) \quad E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(P_\phi - P_4 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta$$

حالا به انرژی فوق توجه کنید. اگر انرژی تیایسوی پوثر $V(\theta)$ به حساب آید. زیرا توقف کنیم حرکت بسیار کند
مثال نبرد انرژی خواهد بود.

$$(10) \quad V(\theta) = \frac{(P_\phi - P_4 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta$$

$$(11) \quad E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

که می توان آن را به صورت زیر حل کرد

$$(12) \quad t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1} [E' - V(\theta)]}}$$

با این نتیجه می توانیم اصل کرده ایم. زیرا می توانیم تابع $\theta = \theta(t)$ را به دست آوریم

گرمین تابع را در دست می بینیم با جایگزینی در روابط

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{P_\psi}{I_3} - \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

می توانیم $\phi = \phi(t)$ و $\psi = \psi(t)$ را به دست آوریم. با دانستن این ψ زاویه می توانیم
 و نیز $\dot{\psi}$ را به دست آوریم.

حال برای این که درک فیزیکی از حرکت فزونی ثابت داشته باشیم. می توانیم به صورت کیفی

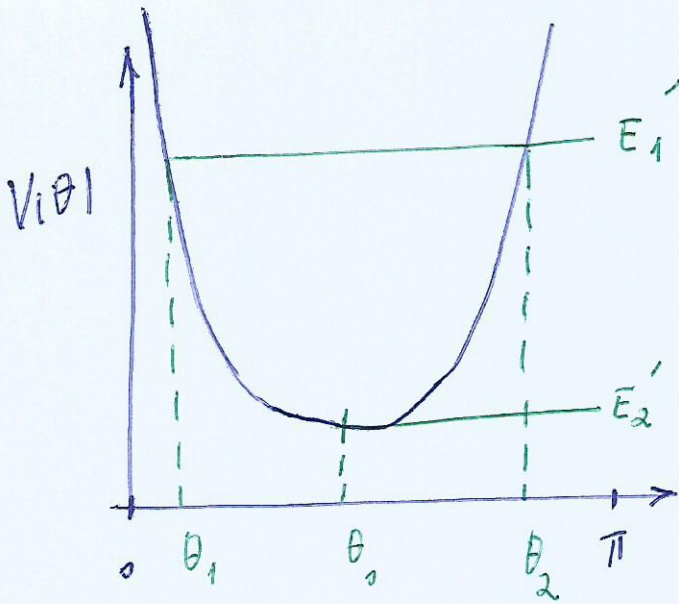
در استفاده از قضیه های نیروی مرکزی استفاده کنیم.

مشاهده: در حرکت فزونی به نحوی باشد که حرکت ψ و ϕ یکی وجود دارد نه

دوران پایداری انجام می دهد. به دلیل نیروهای آلفا می بینیم که

که پایداری فزونی دچار اختلال می شود. می توانیم این حرکت را می توانیم توضیح دهیم

به شکل زیر توجه کنید که با تغییر زاویه θ مسیر تغییر می‌کند.

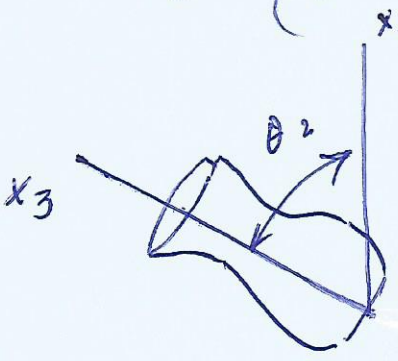
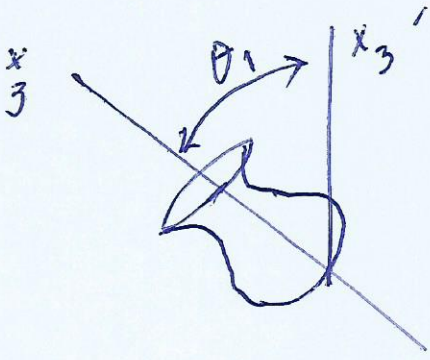


شکل 2

محدوده حرکت نوسانی $0 < \theta < \pi$ است.

همانند انرژی کمتری، انرژی سیستم اثر شش‌پایه با توجه به شکل تغییر می‌کند، می‌توان نوع حرکت را مشخص کرد. انرژی E_1' ، حرکت همدیس نوسان θ_1, θ_2 وجود دارد. انرژی سیستم E_2' باشد همانند حرکت نوسانی انرژی کم است جواب، مدار دامپینگ داریم در این حالت نیز یک زاویه θ خواهیم داشت.

مادامی که زاویه θ زاویه معکوس شود، دستگاه چپ و راست است.



شکل 3

$\theta_1 < \theta_2$ زاویه دوران

برای به دست آوردن θ که زاویه انحراف است برای چرخش نقطه است باید مشتق پتانسیل نواری را گرفته و برابر صفر قرار دهیم

$$(14) \quad V(\theta) = \frac{(P\phi - P_4 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta$$

$$(15) \quad \left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta = \theta_0} = 0 = \frac{2 \sin \theta_0 P_4 (P\phi - P_4 \cos \theta_0) \cdot 2I_1 \sin^2 \theta_0}{4I_1^2 \sin^4 \theta_0}$$

$$- \frac{4I_1 \cos \theta_0 \sin \theta_0 (P_4 - P_4 \cos \theta_0)^2}{4I_1^2 \sin^4 \theta_0} - Mgh \sin \theta_0$$

$$= \frac{P_4 \sin^2 \theta_0 (P\phi - P_4 \cos \theta_0) - \cos \theta_0 (P_4 - P_4 \cos \theta_0)^2}{I_1 \sin^3 \theta_0} - Mgh \sin \theta_0$$

حالت متوقف β به صورت زیر خواهد بود

$$(16) \quad \beta \equiv P_4 - P_4 \cos \theta$$

در تمام موارد β (15) باید خواهد بود

$$(17) \quad \cos \theta_0 \beta^2 - (P_4 \sin^2 \theta_0) \beta + (Mgh I_1 \sin^4 \theta_0) = 0$$

در نتیجه جواب β برابر خواهد بود با

$$(18) \quad \beta = \frac{P_4 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh I_1 \cos \theta_0}{P_4^2}} \right)$$

از آنجایی که β باید حقیقی باشد شرط زیر را حالت $\theta_0 < \pi/2$ برای P_4 باید داشته باشیم

$$(19) \quad P_4^2 \geq 4Mgh I_1 \cos \theta_0$$

از طرف دیگر $P_4 = I_3 \omega_3$ (در نتیجه ω_3 باید برای ω_3 به دست می آید)

$$(20) \quad \omega_3 \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgh I_1 \cos \theta_0}$$

نتیجه: در زاویه ثابت θ_0 ، چرخش پدیدار برای فرجه داریم، در نتیجه ω_3 از فرجه ω_3 بیشتر است.
حال حرکت ϕ در حالت تعادل با توجه به رابطه (13) داریم.

$$(21) \quad \dot{\phi}_0 = \frac{\beta}{I_1 \sin^2 \theta_0}$$

این دو معنی متفاوتی در مورد حرکت برای $\dot{\phi}$ در تعادل داریم. برای هر کدام از جواب β

$$(22) \quad \dot{\phi}_0 (+) \rightarrow \text{حرکت تعادل سریع} \quad \text{fast precession.}$$

$$\dot{\phi}_0 (-) \rightarrow \text{حرکت تعادل کند} \quad \text{slow precession.}$$

7,

در صورتی که P_4 از $2MghI_1 \cos \theta_0$ بزرگتر باشد، β را می توانیم بنویسیم

(23) if $P_4^2 \gg 4MghI_1 \cos \theta_0$ accordingly

$$\beta = \frac{P_4 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \left(1 - \frac{2MghI_1 \cos \theta_0}{P_4^2} \right) \right)$$

(24) $\beta_+ = \frac{P_4 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \rightarrow \dot{\phi}_0^+ \approx \frac{\beta_+}{I_1 \sin^2 \theta_0} \approx \frac{P_4}{I_1 \cos \theta_0} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0}$

(25) $\beta_- = \frac{\sin^2 \theta_0 MghI_1}{P_4} \rightarrow \dot{\phi}_0^- \approx \frac{\beta_-}{I_1 \sin^2 \theta_0} \approx \frac{Mgh}{I_3 \omega_3}$

همیشه $\dot{\phi}_0$ در باطن به سمت اول می باشد. برای حالت $\theta_0 < \pi/2$ صحیح است.

(26) $\beta = \frac{P_4 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MghI_1 \cos \theta_0}{P_4^2}} \right)$ حال اگر $\theta_0 > \pi/2$ در رابطه

نسبت مثبت و از دست راست 1

$\beta_+ > 0 \rightarrow \dot{\phi}_0(t)$ حالت مثبت

(27) $\beta_- < 0 \rightarrow \dot{\phi}_0(t)$ حالت منفی

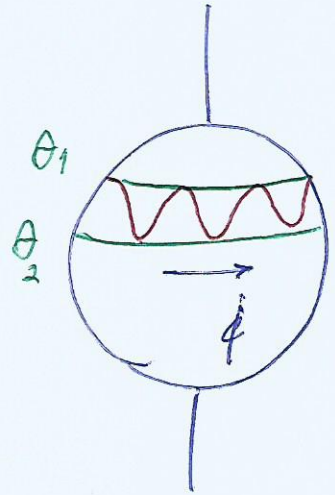
حال برای بررسی در حالتی که $\theta_1 < \theta_2$ ، اگر به رابطه حرکت تقدس نگاه کنیم

$$(28) \quad \dot{\phi} = \frac{P_{\phi} - P_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

بنا بر چه مقدار P_{ϕ} ، P_{ψ} می توانیم ϕ های هم علامت یا خلاف علامت داشته باشیم.
 در صورتی که ϕ همواره هم علامت باشد، معنای آن این است که به صورت یکپارچه حرکت خواهد کرد.
 (در استثناء حرکت) حرکت تقدس انجام می دهد.

لذا حرکت دور فرقه بین دو زاویه θ_1 ، θ_2 ، در نظر می گیریم nutation انجام می دهد.

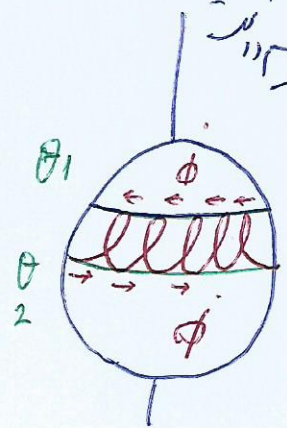
1/4 (نقطه 4)



حال اگر ϕ حول دو زاویه θ_1 ، θ_2 تغییر علامت دهد. حرکت ϕ در θ_1 ، θ_2 متغیر است

خواهد بود سطح loop - ستاره خواهد بود

1/5 (نقطه 5)



9,

حالت اول این است که یکی از زوایا β را صفر کنند

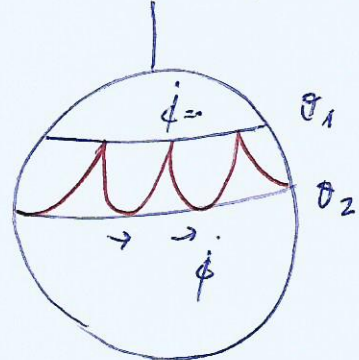
$$(29) \quad (P_\phi - P_\psi \cos \theta) \Big|_{\theta = \theta_1} = 0$$

در این صورت

$$(30) \quad \dot{\phi} \Big|_{\theta = \theta_1} = 0 \quad ; \quad \dot{\theta} \Big|_{\theta = \theta_1} = 0$$

در نتیجه در زمان θ_1 شکل cuspy خواهد بود -

1: شکل (6)



بنابراین جهت θ را از θ_1 تا θ_2 حرکت نشان دهنده شرایط اول برای است که نمره را شمع - چرخاندیم $\theta = \phi = 0$

شکل های "4", "5" در صورتی که در این دو شکل ϕ داشته باشند.

gûros
circle

γῦρος

زیروسکوپ gyroscope از لغت های

دسته ای برای اندازه گیری نه حرکت زاویه ای، جهت یا است

skopeō
to look

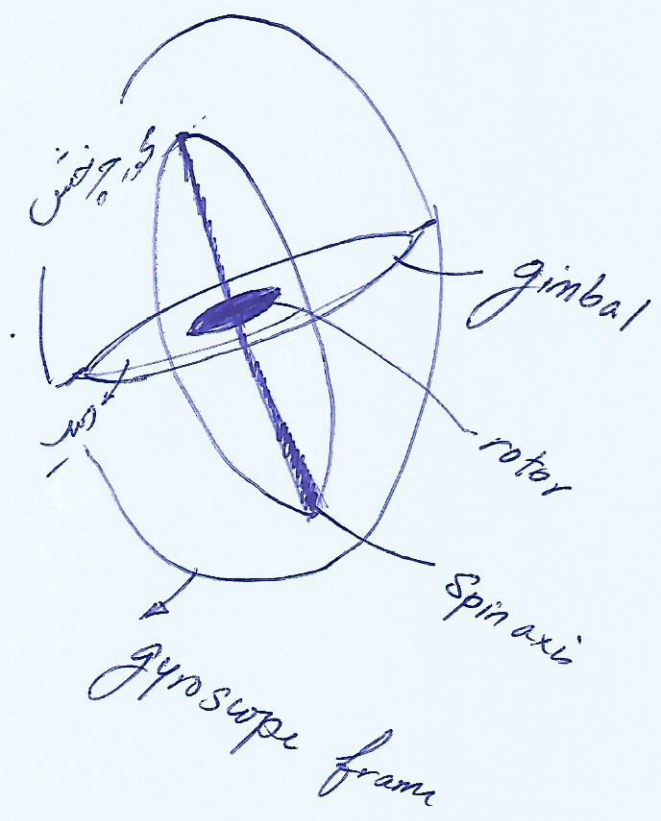
σκοπέω

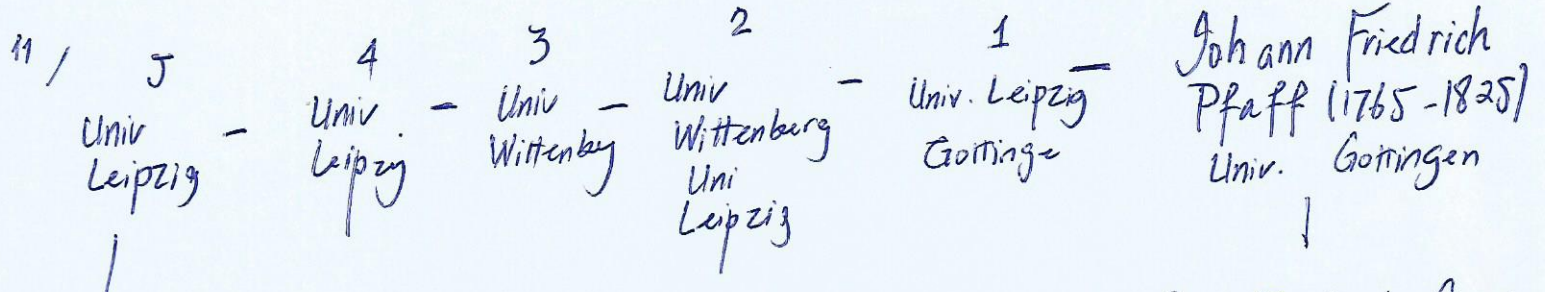
(چرخش)

اولین آزمایش توسط John Serson (1743) ساخته شد بعد از آن لایبسن و فولو را خط کرد.

آزمایش Gravity Probe B نیز برای اندازه گیری دو اثر هم

frame-dragging و geodesic effect استفاده می شود.





6 Friedrich Leibniz
1597-1652
University of Leipzig
Father of Gottfried Leibniz

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)
A.M. University of Göttingen

influence

Max Karl Planck
(1858-1947)
Ludwig Maximilian University of Munich

Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)
University Königsberg
University Berlin
University Heidelberg

Bernhard Riemann
(1826-1866)
University of Göttingen

* Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
Student of Euler
A.M. University of Turin
Inst. Ecole Normale, Ecole Polytechnique.

* Joseph Fourier
(1768-1830)
A.M.: Ecole Normal
Inst: Ecole Poly.

* Joseph Fourier
1768-1830
Ecole Normal

Simeon Poisson (1781-1842)
A.M.: Ecole Polytechnique
Inst.: " & Bureau des longitudes

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
Inst: University Göttingen

Claude Louis Navier
1785-1836
Joseph Liouville (1809-1882)
A.M. Ecole Polytechnique.
Inst. " & Ecole Centrale Paris

Leopold Kronecker
(1823-1891) University Berlin

Engène Charles Catalan (1814-1894)
A.M. Ecole Polytechnique

Charles Hermite: (1822-1901)
A.M. Sorbonne
Inst: Ecole Polytechnique-Sorbon

Henri Poincaré
1863-1953
Ecole Normal Superior

Henri Poincaré (1854-1912)
A.M. Ecole. Poly. - University of Paris