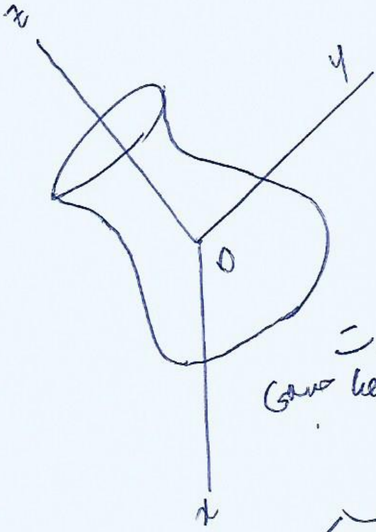
اندازه حرکت زاویه‌ای

در ادامه بحث مربوط به جسم صلب به بررسی اندازه حرکت زاویه‌ای می‌پردازیم.

اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به O در دستگاه مختصات جسمی برابر است با



شکل ۱ - دستگاه مختصات جسمی

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \qquad (1)$$

انتخاب نقطه O دلخواه است، ولی در کل دو انتخاب در حل مسائل فیزیکی به ما کمک می‌کند. ۱) نقطه ثابت یک جسم مانند نقطه اتصال یک آونگ ۲) مرکز جرم جسم صلب

بنابراین سرعت هر ذره از جسم صلب به صورت زیر است و در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای برابر خواهد بود با

$$(2) \qquad \vec{p}_\alpha = m_\alpha \underbrace{\vec{v}_\alpha}_{\text{سرعت ذره } \alpha \text{ نسبت به دستگاه جسمی}} = m_\alpha \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \longrightarrow \vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$$

حال با استفاده از رابطه $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = A^2 \vec{B} - \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B})$، اندازه حرکت زاویه‌ای برابر خواهد بود با

$$(3) \qquad \vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \vec{\omega} - \vec{r}_\alpha (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \right]$$

حال برای پیدا کردن ارتباط بین اندازه حرکت زاویه‌ای و تانسور ممان لختی مولفه i-ام اندازه حرکت زاویه‌ای را بررسی می‌کنیم.

$$(4) \quad L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left(w_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} w_j \right),$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \sum_j \left(\underbrace{w_j \delta_{ij}} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - w_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

استفاده از تعریف $w_i = w_j \delta_{ij}$ برای فاکتورگیری از $\sum_j$

$$= \sum_j w_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)}_{I_{ij}}$$

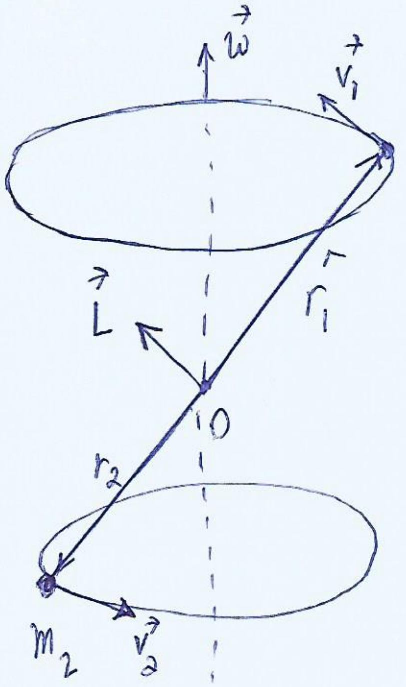
تعریف تانسور لختی

در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای به شکل زیر خواهد بود.

$$(5) \quad \boxed{L_i = \sum_j I_{ij} w_j}$$

نتیجه فوق، نتیجه جالبی است و خلاف انتظار. زیرا فرض کنید که سرعت زاویه‌ای در یک جهت مشخص باشد $w_i = (w_x, 0, 0)$ حال اگر تانسور لختی عناصر غیر قطری داشته باشد. اندازه حرکت زاویه‌ای در هر سه جهت روشن می‌شود. این خلاف دانش قبلی ما بود که فرض بر آن بود که جهت اندازه حرکت زاویه‌ای در جهت سرعت زاویه‌ای است.

نمونه معرفی شده برای این مثال، سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت زاویه‌ای دمبل به شکل زیر است.



شکل ۲

میله متصل شده بر جرم است، در نتیجه جهت سرعت زاویه‌ای در $\hat{z}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای عمود بر میله است.
نتیجه بعدی که از ارتباط بین اندازه حرکت زاویه‌ای و تانسور لختی می‌توان داشت. بدین ترتیب است.

$$(6) \qquad L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i}_{\text{ضرب این عبارت در ۲ طرف تساوی}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j = T_{rot}$$

در نتیجه

$$(7) \qquad T_{rot} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

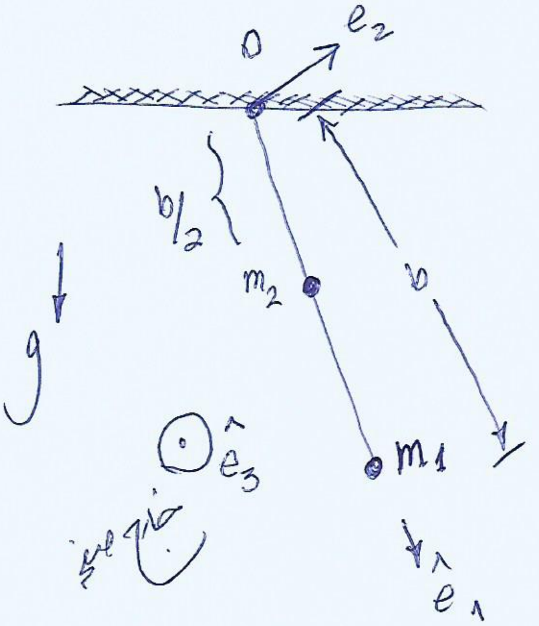
شکل ماتریسی این روابط به صورت زیر خواهد بود.

$$(8) \qquad \underbrace{L}_{\text{بردار}} = \underbrace{\{I\}}_{\text{تانسور}}\cdot\underbrace{\omega}_{\text{بردار}}$$

$$(9) \qquad \underbrace{T_{rot}}_{\text{اسکالر}} = \frac{1}{2}\,\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{بردار}}\cdot\underbrace{\vec{L}}_{\text{بردار}} = \frac{1}{2}\,\underbrace{\omega}_{\text{بردار}}\cdot\underbrace{\{I\}}_{\text{تانسور}}\cdot\overbrace{\omega}^{\text{بردار}}$$

4

مثال ۱: میله ای را در نظر بگیرید به طول b، که دو جرم m_1 ، m_2 در انتها و وسط میله قرار گرفته باشند (مطابق شکل). هدف پیدا کردن فرکانس نوسان های کوچک است.



- در ابتدا دستگاه مختصات تخت و جسم را در نقطه O انتخاب کنیم $\hat{e}_1$ در جهت میله $\hat{e}_2$ در صفحه و $\hat{e}_3$ خارج صفحه است.

سرعت زاویه ای $\vec{w} = w_3 \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_3$

برای محاسبه ممان لختی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k} x^2_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \qquad (6)$$

که $\underset{\text{ذره } 2}{X_{2}} = (b/2, 0, 0)$ و $\underset{\text{ذره } 1}{X_{1}} = (b, 0, 0)$ $\quad \alpha = 1,2$

$$I_{ij} = m_1 \left(\underbrace{\delta_{ij}}_{\text{ذره } 1} \underbrace{X^2_{1,1}}_{\text{تنها جمله 1 وجود دارد}} - X_{1,i} X_{1,j} \right) + m_2 \left(\delta_{ij} \underbrace{X^2_{2,1}}_{\text{ذره } 2 \text{ مولفه } 1} - x_{2,i} x_{2,j} \right) \qquad (7)$$

$$I_{11} = m_1 (b^2 - b^2) + m_2 \left((b/2)^2 - (b/2)^2 \right) = 0 \qquad (8)$$

$$I_{22} = m_1 (b^2 - 0) + m_2 \left((b/2)^2 - 0 \right) = m_1 b^2 + m_2 b^2/4$$

$$I_{33} = m_1 (b^2 - 0) + m_2 \left((b/2)^2 - 0 \right) = m_1 b^2 + m_2 b^2/4$$

در نتیجه

$$\{I\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

حال می‌توانیم اندازه حرکت زاویه‌ای را از رابطه زیر بدست آوریم.

$$\vec{w} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

تمام مولفه I_{1j} صفر است

$$(10) \qquad L_i = \sum_j I_{ij} w_j \rightarrow \begin{cases} L_1 = I_{1j} w_j = 0 \\ L_2 = I_{22} \underbrace{w_2}_{\text{صفر}} = 0 \quad (I_{22}\text{ تنها ترم غیرصفر}) \\ L_3 = I_{33} w_3 = \left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\dot{\theta} \end{cases}$$

تنها نیروی خارجی بر سیستم گرانش است که بر روی سیستم گشتاور وارد می‌کند.

$$(11) \qquad \dot{\vec{L}} = \tau = \left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\ddot{\theta}\,\hat{e}_3 = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

با توجه به اینکه $\vec{g} = g\cos\theta\,\hat{e}_1 - g\sin\theta\,\hat{e}_2$ خواهیم داشت

$$(12) \qquad \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = b\,\hat{e}_1 \times (\cos\theta\,\hat{e}_1 - \sin\theta\,\hat{e}_2)\,m_1 g$$

$$= -m_1 g b \sin\theta\,\hat{e}_3$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \frac{b}{2}\,\hat{e}_1 \times (\cos\theta\,\hat{e}_1 - \sin\theta\,\hat{e}_2)\,m_2 g$$

$$= -m_2 g \frac{b}{2} \sin\theta\,\hat{e}_3$$

$$\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\ddot{\theta}\,\hat{e}_3 = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

حال با جایگذاری در رابطه ... خواهیم داشت:

$$b^2\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right)\ddot{\theta} = -bg\sin\theta\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) \qquad (13)$$

در نتیجه فرکانس نوسانات کوچک برابر خواهد بود با

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 + m_2/2}{m_1 + m_2/4}\; g/b \qquad (14)$$

اگر در رابطه فوق $m_1 \gg m_2$ باشد نتیجه استاندارد $\omega_0^2 \approx g/b$ را خواهیم داشت و اگر $m_2 \gg m_1$، سرعت زاویه‌ای $\omega_0^2 \approx 2g/b$ خواهد بود.

حال این نتیجه را از روی لاگرانژی به دست می‌آوریم. انرژی جنبشی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$(15)\quad \begin{cases} T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2}\omega_3 L_3 = \frac{1}{2}\omega_3^2 I_{33} \\ L_3 = I_{33}\omega_3 \qquad T_{rot} = \frac{1}{2}\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

انرژی پتانسیل:

$$(16)\quad U = -m_1 g b\cos\theta - m_2 g \frac{b}{2}\cos\theta$$

معادله اویلر لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود.

(17)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 = -m_1 g b\sin\theta - m_2 g\frac{b}{2}\sin\theta - \left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\ddot{\theta} = 0$$

که همان رابطه (13) است.

Principal Axes of Inertia محورهای اصلی لختی

در محاسبات انرژی جنبشی و اندازه حرکت زاویه ای دیدیم که اگر تانسور لختی قطری باشد، محاسبات بسیار ساده خواهد بود. از سوی دیگر با مفهوم ممان لختی که در فیزیک پایه با آن آشنا بودیم نزدیک تر خواهیم شد. در این صورت که

$$(18) \qquad I_{ij} = I_i \delta_{ij} \qquad \text{یا} \qquad \{I\} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه اندازه حرکت زاویه ای و انرژی جنبشی برابر خواهند بود با

$$(19) \qquad L_i = \sum_j I_{ij} w_j = \sum_j I_i \delta_{ij} w_j = I_i w_i$$

جمع روی اندیس I نیست!

$$(20) \qquad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} w_i w_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_i \delta_{ij} w_i w_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i w_i^2$$

این قطری سازی بدان معناست که دستگاه مختصات جسم را انتخاب کنیم که عناصر غیرقطری inertia product صفر شود. محور مختصات دستگاه جسم که تانسور لختی را قطری می کند محورهای اصلی لختی principle axis of inertia می گویند.

این مطلب بدین معنا است که اگر جسم صلب حول یکی از محورهای اصلی بچرخد، اندازه حرکت زاویه و سرعت زاویه ای هم جهت خواهند بود. حال اگر I ممان لختی در راستای چرخش باشد آنگاه

$$\vec{L} = I\vec{w} \qquad (21)$$

با برابر قرار دادن عبارت فوق با رابطه $L_i = \sum_j I_{ij} w_j$ خواهیم داشت

$$(22) \qquad \begin{aligned} L_1 &= I w_1 = I_{11} w_1 + I_{12} w_2 + I_{13} w_3 \\ L_2 &= I w_2 = I_{21} w_1 + I_{22} w_2 + I_{23} w_3 \\ L_3 &= I w_3 = I_{31} w_1 + I_{32} w_2 + I_{33} w_3 \end{aligned}$$

شرط این که مجموعه عبارات فوق جواب غیر بدیهی داشته باشند این است که دترمینان ماتریس زیر صفر باشد

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

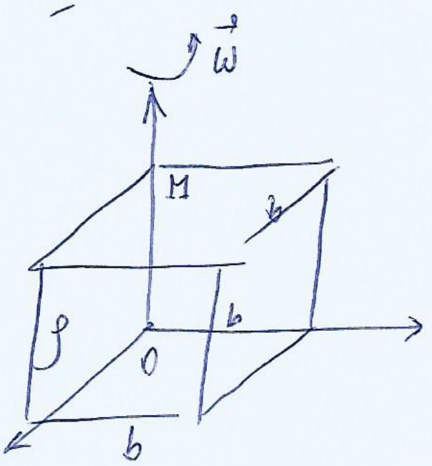
دترمینان فوق معادله مشخصه deterministic equatin را خواهد داد. معادله مشخصه یک معادله درجه ۳ است در نتیجه ۳ جواب این معادله ممان های اصلی principle moment of inertia را به دست خواهند داد. اگر محورها اصلی انتخاب شوند، اندازه حرکت سرعت زاویه ای هم جهت شده و نسبت مولفه های سرعت زاویه ای می توان جهت محورهای اصلی را به دست آورد. البته همواره اجسام صلب تقارن هایی دارند که از روی آن می توان محورهای اصلی را بدست آورد.

اگر ممان های لختی هر ۳ برابر باشد جسم صلب کروی است $I_1 = I_2 = I_3$

اگر $I_1 = I_2 \neq I_3$ تقارن محوری دارد. Symmetric-top و در صورتی

که هر ۳ ممان متفاوت باشد به آن asymmetric top گویند.

برای درک بهتر از مفهوم قطری کردن به مثال مکعب با ضلع b و جرم M بر می‌گردیم.



$$\beta \equiv Mb^2 \qquad (24)$$

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix}$$

- مبداء مختصات در یکی از گوشه‌ها

به طور واضح محورهای مختصات انتخاب شده محورهای اصلی نیستند، به طور مثال اگر مکعب را حول محور سوم بچرخانیم $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ آنگاه اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

(25)

$$\begin{cases} L_1 = \sum_j I_{1j}\,\omega_j = I_{13}\,\omega_3 = -\frac{1}{4}\beta\,\omega_3 \\ L_2 = \sum_j I_{2j}\,\omega_j = I_{23}\,\omega_3 = -\frac{1}{4}\beta\,\omega_3 \\ L_3 = \sum_j I_{3j}\,\omega_j = I_{33}\,\omega_3 = \frac{2}{3}\beta\,\omega_3 \end{cases}$$

تنها مولفه غیرصفر $j=3$

درنتیجه

$$\vec{L} = Mb^2\,\omega_3 \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$$

برای به دست آوردن ممان های لختی اصلی باید دترمینان زیر را حل کنیم

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

با جبر ساده می توان دترمینان فوق را حل کرد در نتیجه خواهیم داشت

$$I_1 = \frac{1}{6}\beta \qquad I_2 = \frac{11}{12}\beta \qquad I_3 = \frac{11}{12}\beta \qquad (27)$$

در نتیجه تانسور ممان لختی

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta & & \\ & \frac{11}{12}\beta & \\ & & \frac{11}{12}\beta \end{pmatrix}$$

چون $I_2 = I_3$ است در نتیجه محور مربوط به ویژه مقدار I_1، محور تقارن است.

برای به دست آوردن جهت محور I_1 به صورت زیر عمل می کنیم. مقدار $I_1 = \frac{1}{6}\beta$ را در رابطه (22) قرار می دهیم و سرعت های زاویه ای را دو اندیسی می کنیم

به صورت ω_{ij}

i جهت محور مختصات

j مربوط به ممان j ام

به طور مثال: ω_{12} به معنی مؤلفه سرعت زاویه در جهت x مربوط به ممان دوم I_2

در نتیجه رابطه (22) برای مکعب برابر خواهد بود با

$$(28)\quad \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right) w_{11} - \frac{1}{4}\beta w_{21} - \frac{1}{4}\beta w_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}\beta w_{11} + \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right) w_{21} - \frac{1}{4}\beta w_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}\beta w_{11} - \frac{1}{4}\beta w_{21} + \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right) w_{31} = 0 \end{cases}$$

$\frac{2}{3}\beta \rightarrow I_{11}$, $\frac{1}{6}\beta \rightarrow I_1$, $w_{11} \rightarrow$ جهت x، مربوط به I، $w_{21} \rightarrow$ جهت y، $w_{31} \rightarrow$ جهت z

در رابطه اول اگر بر $\beta/4$ تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\left.\begin{aligned} 2w_{11} - w_{21} - w_{31} &= 0 \\ -w_{11} + 2w_{21} - w_{31} &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow w_{11} = w_{21} \qquad (29)$$

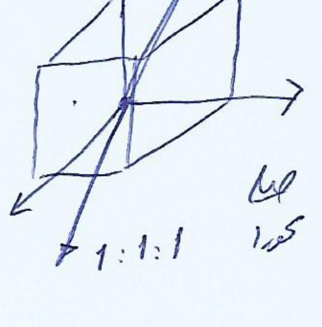
رابطه سوم (28)

$$-\frac{1}{4}\beta w_{11} - \frac{1}{4}\beta w_{21} + \frac{1}{2}\beta w_{31} = 0 \rightarrow w_{11} + w_{21} - 2w_{31} = 0$$

$$w_{11} = w_{21} = w_{31}$$

$$\underset{x}{w_{11}} : \underset{y}{w_{21}} : \underset{z}{w_{31}} = 1:1:1$$

در نتیجه نسبت برابر خواهد بود با



این محور اصلی معادل قطر مکعب است

صفحه متقارن عمود بر I_3 است $I_2 = I_3$