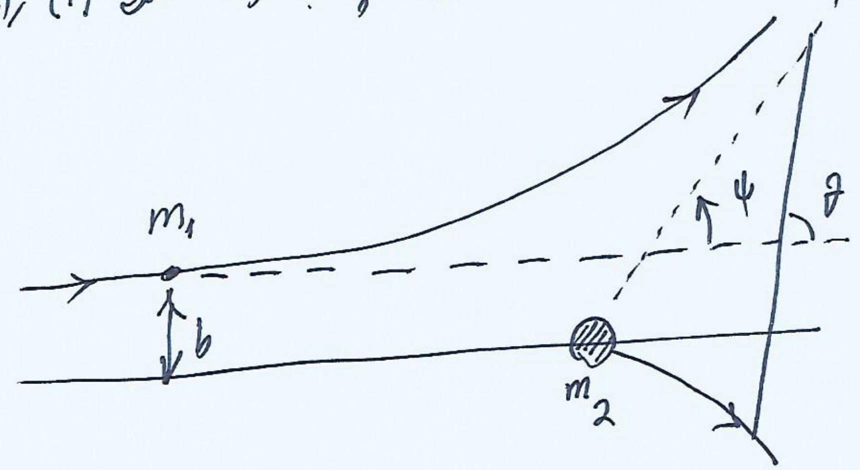
مکانیک تحلیلی ۲ نیمسال دوم ۹۸/۹۹ جلسه ۱۷ اسفند ۱۳۹۸

سطح مقطع پراکندگی :

در این درس نامه به بررسی یکی از مهم‌ترین مفاهیم فیزیکی بنام سطح مقطع برخورد Scattering Cross Section یا سطح مقطع پراکندگی می پردازیم.

فرض کنید ذره ی کاوشگر به جرم m_1 به سمت ذره هدف m_2 پرتاب شود. شکل (۱) را مشاهده کنید



شکل ۱

نیروی بین ذره ۱ و ۲ دافعه است repulsive force ، b پارامتر برخورد ، نزدیکترین فاصله ای که ذره کاوشگر با ذره هدف دارد. θ ، ψ به ترتیب زوایای پراکندگی در دستگاه LAB ، CM هستند.

برای این که مفهوم بنیادی سطح مقطع را درک کنیم، از مثال های ساده شروع می کنیم

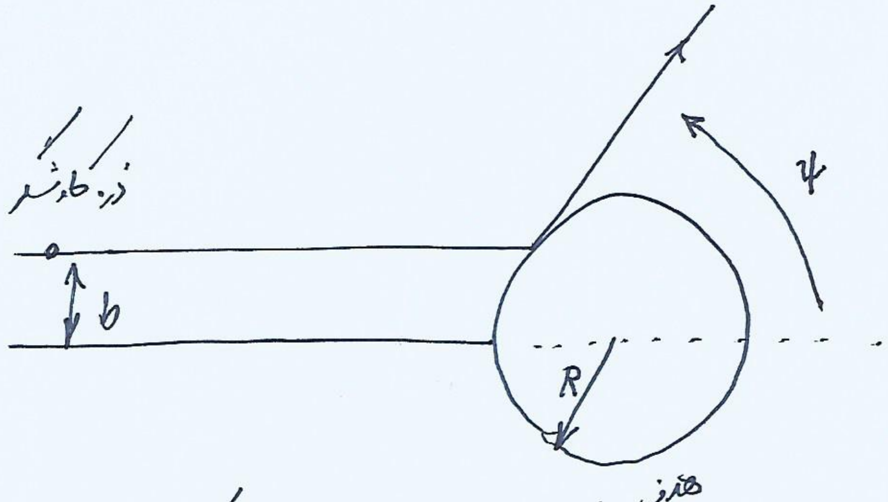
فرض کنید که ذره کاوشگر به سمت ذره ای فرستاده می شود که پتانسیل زیر را دارد.

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r < R \end{cases} \tag{1}$$

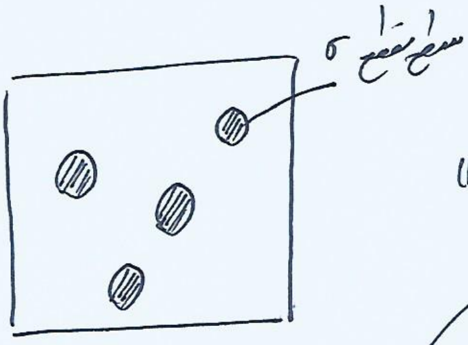
به این پتانسیل، پراکندگی کره سخت hard sphere scattering گویند.

شکل مربوط به این پراکندگی را در زیر مشاهده می کنید.

شکل ۲)



این شکل نشان دهنده برخورد یک ذره با گوی سخت به شعاع R است. اگر پارامتر برخورد b بزرگتر از R باشد بدون برخورد رد خواهد شد در صورتی که $b<R$ باشد پراکندگی از گوی و قابل ملاحظه خواهیم داشت کاملاً مشهودی است که سطحی از هدف $\sigma = \pi R^2$ در فضا وجود دارد. σ را سطح مقطع این تیپ مسئله می‌گویند. حال فرض کنید که تعدادی از این هدف‌ها را داشته باشیم مانند شکل (۳)



شکل (۳)

فرض کنید که تعداد هدف‌ها به اندازه‌ای کم باشد که برای هر ذره کاوشگر فقط یک پراکندگی رخ دهد.

حال اگر n_{tar} چگالی سطحی هدف‌ها باشد. در نتیجه تعداد کل هدف‌ها برابر An_{tar} خواهد بود.

حال برای بررسی آماری تعداد پراکندگی‌ها به صورت آماری می‌توان احتمال را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\underset{\text{احتمال}}{P} = \frac{\overset{\text{تعداد}}{(A n_{tar})} \times \sigma}{A} = n_{tar} \cdot \sigma \qquad (2)$$

حال اگر تعداد ذرات ارسال شده به سمت هدف N_{inc} باشد، تعداد ذرات پراکنده N_{sca} برابر خواهد بود با:

$$N_{sca} = P N_{inc} = N_{inc} n_{tar} \sigma \qquad (3)$$

حال برمی گردیم به شکل (۱) و فرض کنید که یک نیروی دافعه بین ذره 1 و 2 وجود داشته باشد اگر سرعت ذره (1) در دستگاه LAB ، u_1 باشد و b پارامتر برخورد باشد در نتیجه اندازه حرکت زاویه ذره m_1 را نسبت به هدف m_2 به صورت زیر بدست می آید.

(۴)

$$l = m_1 u_1 b$$

اندازه حرکت زاویه ای

از طرف دیگر انرژی جنبشی کل اولیه برابر است با $T_{tot,i} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$

در نتیجه اندازه حرکت زاویه ای برحسب انرژی جنبشی برابر خواهد بود با :

(۵)

$$l = b\sqrt{2 m_1 T_{tot,i}}$$

این بدین معنی است که برای یک میدان نیروی شناخته شده، اگر انرژی جنبشی ذرات کاوشگر و پارامتر برخورد مشخص باشد زاویه پراکندگی ψ و θ مشخص است. البته در آزمایش های پراکندگی ذرات تعیین دقیق پارامتر برخورد مقدور نیست، از این رو درباره احتمال پراکندگی در زوایای متفاوت بحث می شود.

برای بررسی این احتمال، آزمایشی را ترتیب می دهیم، مجموعه ای از ذرات به جرم m_1 و انرژی اولیه T_i را در ناحیه بسیار کوچک فضایی به سمت ذرات هدف پرتاب می کنند. این ذرات دارای شدت (Intensity) و یا چگالی شار flux density I هستند، به معنای تعداد ذرات در واحد زمان در واحد سطح عمود بر جهت تابش

(۶)

$$I = \frac{\#\ \text{ذرات}}{dA_{\perp}\, dt}$$

که $dA_{\perp}$ واحد سطح عمود بر جهت تابش است.

اگر فرض کنیم که نیروی دافعه بین m_1 و m_2 با فاصله سریعاً کاهش می‌یابد، این فرض منعکس خواهد بود که ذره m_1 پس از برخورد مسیر تقریباً خطی خواهد داشت و با زاویه θ در دستگاه CM پراکنده خواهد شد.

حال سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی $\sigma(\theta)$ را در دستگاه مرکز جرم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(\theta) = \frac{\text{تعداد ذراتی که پس از پراکنش باید در زاویه فضایی } d\Omega' \text{ در زاویه } \theta \text{ منحرف شود}}{\text{تعداد ذرات تابش شده در واحد سطح}} \qquad (7)$$

توجه داشته باشید که در رابطه فوق $\sigma(\theta)$ واحد سطح دارد. حال می‌توان این تعریف را بر اساس شار تابشی I به صورت زیر نوشت.

$$(8) \qquad \sigma(\theta)\, d\Omega' = \frac{dN}{I}$$

که dN تعداد ذراتی است که در واحد زمان در زاویه فضایی $d\Omega'$ پراکنده می‌شود. در نتیجه احتمال پراکندگی در زاویه فضایی $d\Omega'$ برابر $\sigma(\theta)\, d\Omega'$ است. گاهی رابطه سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی به صورت زیر است

$$(9) \qquad \sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I}\frac{dN}{d\Omega'}$$

به $\sigma(\theta)$ سطح مقطع پراکندگی می‌گوییم.

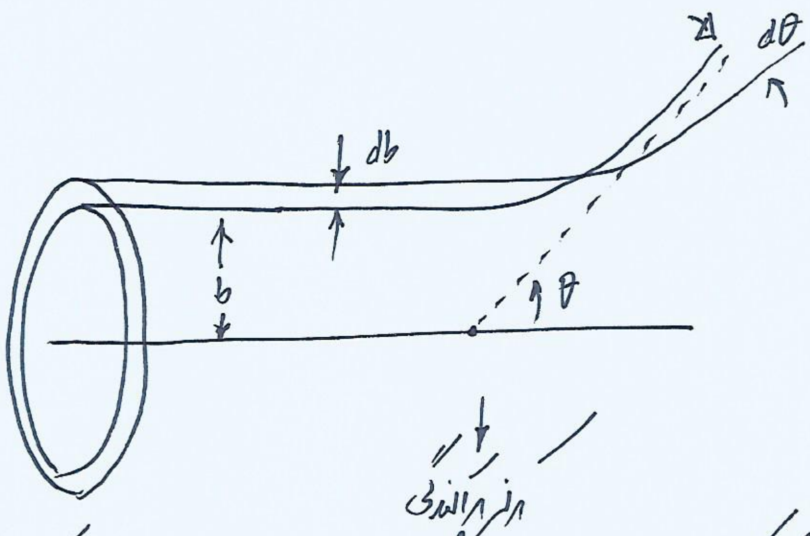
تعریف

واحد سطح بر واحد استرادیان

در صورتی که فرآیند برخورد تقارن محوری داشته باشد، زاویه فضایی به زاویه انحراف در دستگاه مرکز جرم CM به صورت روبرو ارتباط دارد

$$d\Omega' = 2\pi \sin\theta \, d\theta \tag{10}$$

حال فرض کنید مسئله دو جسم را به یک جسم با جرم کاهش‌یافته μ که از مرکز نیرو پراکنده می‌شود تقلیل دهیم. و فرض کنیم ذرات با پارامتر برخورد بین b و $b+db$ به سمت مرکز نیرو پرتاب شوند و تحت زاویه بین θ و $\theta+d\theta$ مطابق شکل (۴) پراکنده شوند.



(شکل ۴)

توجه داشته باشید که ذره‌ای که با پارامتر برخورد b پرتاب می‌شود، زاویه انحراف بزرگتری نسبت به ذراتی دارد که با پارامتر برخورد $b+db$ به سمت مرکز نیرو پراکنده شده‌اند.

با توجه به پایستگی تعداد ذرات خواهیم داشت

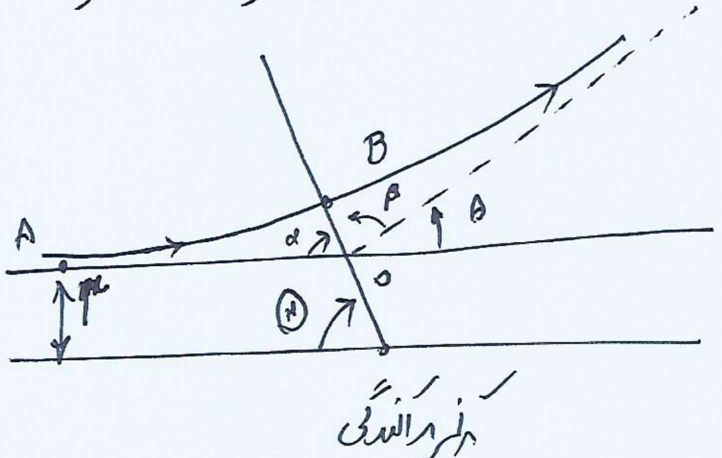
$$\underbrace{I}_{\text{شار ذرات ورودی}} \cdot \underbrace{2\pi b \, db}_{\text{سطح}} = - I \cdot \underbrace{\sigma(\theta)}_{\text{سطح مقطع}} \cdot \underbrace{2\pi \sin\theta \, d\theta}_{\text{زاویه فضایی}} \tag{11}$$

توجه باید داشته باشیم $db/d\theta$ منفی است. یعنی با افزایش b زاویه θ کاهش می‌یابد.

در نتیجه سطح مقطع برخورد برابر خواهد بود با

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|} \qquad (12)$$

رابطه بالا رابطه بسیار مهمی است. هدف بعدی این محاسبه پیدا کردن ارتباط بین پارامتر برخورد b و زاویه انحراف است. برای این محاسبه احتیاج به دانش مکانیک تحلیلی در مورد نیروی مرکزی است. شکل زیر را توجه کنید.



(شکل ۵)

B: point of closest approach

ذره با جرم کاهیده μ از فاصله دور با پارامتر برخورد b به سمت مرکز نیرو حرکت می کند. نقطه B نزدیکترین فاصله از مرکز نیرو است در نتیجه زاویه Θ، زاویه بین دو خط AO و OB است. θ زاویه انحراف در مرکز جرم است. نکته مهم این که زاویه Θ در حرکت نیروی مرکزی محاسبه شده است.

$$\Delta\Theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(l/r^2)\,dr}{\sqrt{2\mu\left[E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}} \qquad (13)$$

حرکت ذره در نیروی مرکزی نسبت به نقطه B نزدیکترین فاصله متقارن است. در نتیجه $\Theta = \alpha = \beta$

از این رو رابطه بین زاویه پراکندگی θ و Θ برابر است با

$$\theta = \pi - 2\Theta$$

حال زاویه Θ برای $r_{max} = \infty$ به صورت زیر خواهد بود با به رابطه (5) که $l = b\sqrt{2\mu T'_{tot}}$ است به جای m_1، جرم کاهیده و انرژی جنبشی را در دستگاه مرکز جرم نوشتیم.

(14)
$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}\sqrt{2\mu}\, T'^{1/2}_{tot}\, dr}{\sqrt{2\mu}\left[T'_{tot} - U - \frac{b^2 2\mu T'_{tot}}{2\mu r^2}\right]^{1/2}}$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2\, dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - U/T'_{tot}}}$$

توجه داشته باشید که انرژی کل E برابر انرژی جنبشی T'_{tot} است چون در $r = \infty$، انرژی پتانسیل صفر است. همچنین r_{min} ریشه مخرج کسر رابطه (14) است.

(لطفاً فصل نیروی مرکزی را یک بار دیگر مرور کنید)

حال با داشتن نوع نیروی مرکزی (دانش درباره پتانسیل U) و انرژی جنبشی اولیه T'_{tot} می‌توانیم $b = b(\theta)$ را حساب کنیم.

اگر $m_2 \gg m_1$ باشد سطح مقطع بدست آمده در دستگاه مرکز جرم بسیار نزدیک به سطح مقطع دستگاه آزمایشگاه خواهد بود.

ولی اگر m_1 نسبت به m_2 قابل صرف نظر نباشد، آنگاه باید روابط را از دستگاه مرکز جرم به دستگاه آزمایشگاه تبدیل کرد.

توجه داشته باشید که تعداد ذرات پراکنده شده در زاویه فضایی مربوط به θ و ψ برابر است از این رو

$$\underbrace{\sigma(\theta)\, d\Omega'}_{\text{در دستگاه CM}} = \underbrace{\sigma(\psi)\, d\Omega}_{\text{در دستگاه آزمایشگاه}} \qquad (15)$$

$$\sigma(\theta) \times 2\pi \sin\theta \, d\theta = \sigma(\psi)\, 2\pi \sin\psi \, d\psi$$

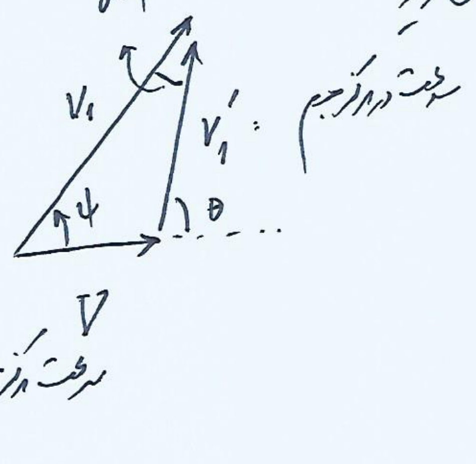
$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \frac{d\theta}{d\psi}$$

$\sigma(\psi)$ سطح مقطع دیفرانسیلی در دستگاه آزمایشگاه است تحت زاویه فضایی $d\Omega$.

حال برای محاسبه $d\theta/d\psi$ از رابطه معروف جلسات قبل

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$$

استفاده می‌کنیم. ما اول از رابطه سینوس‌ها. شکل زیر



$$\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi} = \frac{V}{V_1'} = \frac{m_1}{m_2} \equiv x \qquad (16)$$

در رابطه بالا m_1/m_2 ثابت و x نامگذاری می‌کنیم.

حال با روابط جبری ساده زیر

$$dx = 0 = \frac{\partial x}{\partial \psi}\, d\psi + \frac{\partial x}{\partial \theta}\, d\theta \qquad (17)$$

$$\frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{\partial x/\partial \psi}{\partial x/\partial \theta} = \frac{\dfrac{-\cos(\theta-\psi)\sin\psi - \cos\psi\sin(\theta-\psi)}{-\cancel{\sin^2\psi}}}{\dfrac{\cos(\theta-\psi)\sin\psi}{\cancel{\sin^2\psi}}}$$

$$= 1 + \frac{\cos\psi \sin(\theta-\psi)}{\sin\psi \cos(\theta-\psi)}$$

$$= \frac{\sin\psi \cancel{\cos\theta} \cos\psi + \sin\psi \sin\theta \sin\psi + \cos\psi \sin\theta \cos\psi - \cos\psi \cancel{\cos\theta} \sin\psi}{\sin\psi \cos(\theta-\psi)}$$

$$= \frac{\sin\theta(\sin^2\psi + \cos^2\psi)}{\sin\psi \cos(\theta-\psi)} = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\psi)\sin\psi}$$

در نتیجه

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{\sin^2\theta}{\cos(\theta-\psi)\sin^2\psi} \qquad (18)$$

حال توجه داشته باشید که با رابطه $\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi} = x$ خواهیم داشت

$$\theta = \sin^{-1}(x\sin\psi) + \psi \qquad (19)$$

نکته مهم دیگر این است، روابط فوق را برای برخورد غیر کشسان نیز می توان استفاده کرد فقط با این تفاوت که x را باید نسبت سرعت ها تعریف کرد، نه نسبت جرم ها.

در جلسه آینده مثال هایی از سطح مقطع برخورد را بررسی خواهیم کرد به صورت خاص

سطح مقطع رادرفورد را (1911) E. Rutherford, Phil. Mag 21, 669 که بررسی نیروی مرکزی الکترواستاتیک است می پردازیم.

پتانسیل رادرفورد $U(r) = k/r$ است که $k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$

$k>0$ برای نیروی دافعه و $k<0$ برای نیروی جاذبه.

رابطه بین زاویه Θ با پارامتر برخورد، انرژی حقیقی مرکز جرم و r_{min} به صورت زیر است.

$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r \, dr}{\sqrt{r^2 - (k/T_0)\, r - b^2}} \qquad (20)$$

پایان درس