مکانیک تحلیلی ۲ - نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹/۹۸

دینامیک اجسام صلب

اجسام صلب یکی دیگر از مجردسازی های مفید در فیزیک است. اجسام صلب واقعی در طبیعت وجود ندارند، ولی آن ها تقریب خوبی از اجسام خاص هستند.

طبق تعریف، جسم صلب، جسمی است که تک تک اجزاء تشکیل دهنده آن، نسبت به یکدیگر در موقعیت ثابتی قرار دارند. این فرض خود تقریب است زیرا اتم ها حداقل در موقعیت خود حرکت ارتعاشی دارند. البته این ارتعاش ها در مقیاس میکروسکوپیک هستند و اگر سیستم را در مقیاس ماکروسکوپیک مشاهده کنید، آن را بدون تغییر می یابد.

برای بررسی دینامیک این اجسام از نظریه Chasles' theorem - 1830 استفاده می کنیم بدین صورت که نقطه حرکت انتقال ساده با محور دوران را می توان منطبق برهم در نظر گرفت. این بدین معنا است که برای اجسام صلب، حرکت را به صورت ترکیب حرکت انتقالی + حرکت دورانی می توان دید.

این بدین معنا است که با ۶ پارامتر می توان دینامیک جسم صلب را بررسی کرد.

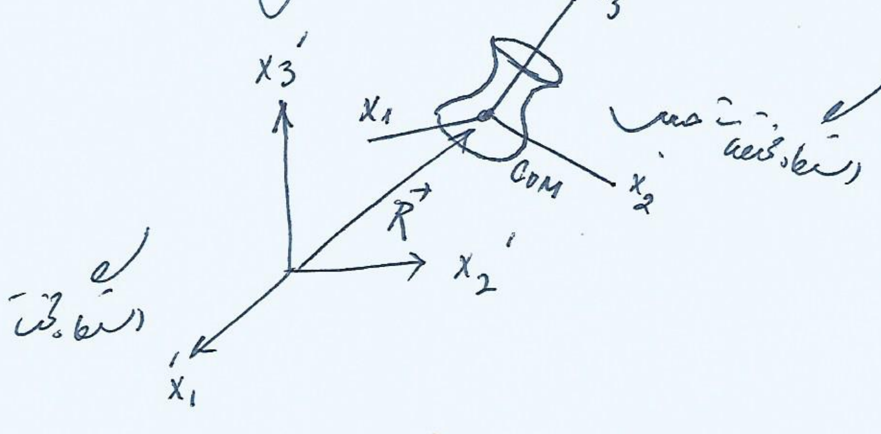
در این راستا، دو دستگاه مختصات تعریف می‌کنیم

۱) دستگاه مختصات ثابت fixed (دستگاه لخت)

۲) دستگاه متصل به جسم body coordinate system.

معمولاً دستگاه مختصات جسمی را بر روی مرکز جرم قرار می‌دهیم. در نتیجه ۳ مولفه مستقل به موقعیت مرکز جرم در دستگاه fixed دارد و ۳ درجه دیگر بستگی به جهت‌گیری جسم صلب نسبت به دستگاه ثابت است که تحت عنوان زوایای اویلر دسته‌بندی می‌شود.

Eulerian angles



(شکل ۱)

□ تانسور لختی

برای بررسی دینامیک اجسام صلب باید از مفهوم جدید تانسور لختی Inertia Tensor آشنا شویم. این کمیت به گونه‌ای تعمیم یافته مفهوم جرم است. از سوی دیگر تانسور است. تانسورها تعریف دقیق ریاضی دارند. قبل از این که این مفهوم را واکاوی کنیم شاید بهتر است که این را با استفاده از مفهوم انرژی جنبشی به دست آوریم.

برای محاسبه تانسور لختی، فرض کنید که n ذره به جرم m_α ، $\alpha = 1,2,\dots,n$

نسبت به یک نقطه ثابت در دستگاه مختصات جسمی با سرعت زاویه ω می‌چرخد.

با توجه به ارتباط بین سرعت‌ها در دو دستگاه لخت و چرخان داریم.

$$\vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1)$$

سرعت در دستگاه ثابت — سرعت مرکز جرم — سرعت ذره در دستگاه چرخان

حال در شرایط جسم صلب سرعت در دستگاه چرخان $\vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rotating} = 0$ است. در نتیجه برای ذره α در دستگاه لخت (اندیس f را حذف کرده‌ایم.)

$$(2) \qquad \vec{v}_\alpha = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

که $\vec{r}_\alpha$ موقعیت ذره α ام است. توجه داشته باشید که از این پس تمام سرعت‌ها در دستگاه ثابت اندازه‌گیری می‌شود. حال انرژی جنبشی ذره α را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(3) \qquad T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

در نتیجه انرژی جنبشی کل را به صورت زیر محاسبه خواهیم کرد.

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{V}\cdot\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right) + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha\right)^2$$

رابطه فوق، یک رابطه کلی برای هر دستگاه مختصات جسم است. ولی اگر دستگاه مختصات جسم را بر روی مرکز جرم قرار دهیم، ترم دوم بسیار ساده خواهد بود زیرا

$$\text{(5)} \qquad \text{ترم دوم} \equiv \sum_\alpha m_\alpha \vec{V} \cdot \vec{w} \times \vec{r}_\alpha = \vec{V} \cdot \vec{w} \times \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \right)$$

توجه کنید $\vec{V}$ و $\vec{w}$ مستقل از α هستند

حال ترم داخل پرانتز برابر است با $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = M\vec{R}$ که $\vec{R}$ مختصه مرکز جرم است که در دستگاه مرکز جرم برابر صفر است. در نتیجه انرژی جنبشی با این انتخاب به صورت زیر خواهد بود.

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{w} \times \vec{r}_\alpha)^2 \qquad (6)$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{w} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{rot}}$$

انرژی جنبشی انتقالی

انرژی جنبشی دورانی

در این جا انرژی جنبشی را به ۲ قسمت انتقالی و دورانی تقسیم می‌کنیم

حال با کمی عملیات جبری، انرژی جنبشی دورانی را به شکل متفاوتی می‌نویسیم.

برای محاسبه $(\vec{w}\times\vec{r}_\alpha)^2$ از اتحاد ε ها، δ ها به صورت زیر استفاده می‌کنیم

(7) $$(A\times B)^2 = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}\times\vec{B})_i\,(\vec{A}\times\vec{B})_i$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk} A_j B_k \,\varepsilon_{imn}}_{\text{تعریف ضرب برداری}} A_m B_n$$

j، k و (n, m) اندیس dummy هستند ، تعریف ضرب برداری

$$= \underbrace{(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})}_{} A_j B_k A_m B_n$$

با استفاده از تعریف $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

$$= A_m B_n A_m B_n - A_n B_m A_m B_n$$

$$= A^2 B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

با استفاده از اتحاد فوق که محاسبه کرده‌ایم، می‌توانیم انرژی جنبشی دورانی را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

(8) $$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left[w^2 r_\alpha^2 - (\vec{w}\cdot\vec{r}_\alpha)^2 \right]$$

حال عبارت فوق را برحسب مولفه‌های $\vec{w}$ و $\vec{r}_\alpha$ می‌نویسیم که $r_\alpha = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$ که α اندیس ذره است. در نتیجه

$$r_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}$$

اندیس ذره — اندیس مختصه

b/

در نتیجه انرژی جنبشی دورانی را به صورت زیر می‌نویسیم.

(9) $$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left[\left(\sum_i \omega_i^2\right)\left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i}\right)\left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j}\right) \right]$$

برای این که این ترم را به شکل آشنا جمع ω (ضریبی)^2 بنویسیم از رابطه $\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij}$ استفاده می‌کنیم تا تکی از ω_i-ها را بازنویسی کنیم.

(10) $$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{ij} m_\alpha \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

حال با توجه به رابطه فوق مولفه ij تنسور I_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(11) $$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

در نتیجه انرژی جنبشی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

(12) $$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\, \omega_i \omega_j}$$

I_{ij} را مولفه های تانسور لختی گویند. شکل ساده شده این عبارت را در فیزیک پایه دیده‌اید که انرژی جنبشی دورانی جسم برابر $T_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ است. سوال این است که ارتباط این ترم ساده سازی شده با I_{ij} چیست؟

I_{ij} که آن را به شکل ماتریس 3×3 می‌توان نوشت، حرکت ها را به انرژی جنبشی ربط می‌دهد. I_{ij} دارای بعد جرم × طول^2 است و تانسور لختی نام دارد.

ویژگی تانسوری در تبدیل مختصات آن به شکل زیر دیده می‌شود.

$$I'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} I_{kl} \qquad (13)$$

که تانسور لختی در دو دستگاه S, S' اندازه‌گیری شده و به صورت فوق تبدیل می‌شود. x'_i و x_k به ترتیب مختصه دستگاه S', S است. ماتریس لختی I_{ij} به صورت مولفه‌ای به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2\right) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2\right) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha,3} x_{\alpha,2}\right) & \sum_\alpha m_\alpha \left(x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2\right) \end{pmatrix} \qquad (14)$$

مولفه های این تانسور را می توان به شکل زیر نیز نوشت.

(15) $$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$ با توجه به باز تعریف

$$r_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2$$

برای ذره α

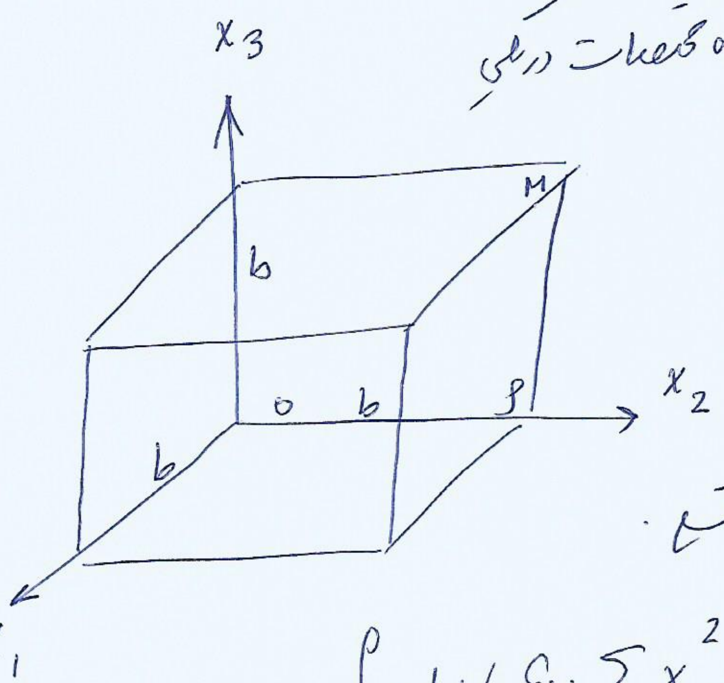
$$\{I\} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - x_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - y_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - z_\alpha^2) \end{pmatrix}$$

به مولفه های I_{11} ، I_{22} ، I_{33} ممان های لختی حول محورهای x_1 ، x_2 ، x_3 گویند. (moments of inertia) و ترم های غیرقطری ضرایب لختی یا products of inertia می گویند. از آنجایی که ممان لختی متقارن است در نتیجه فقط ۶ کمیت مستقل دارد. حال به طور واضح برای یک جسم صلب گسترده خواهیم داشت:

(16) $$I_{ij} = \int_V \rho\, dv \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j\right)$$

که $dv = dx\,dy\,dz$ المان حجم است.

تمرین ساده: ممان اینرسی یک مکعب به طول ضلع b با چگالی ρ و جرم M را حساب کنید به طوری که دستگاه مختصات در یکی از گوشه‌ها باشد.



توجه کنید که در این مثال دستگاه مختصات در مرکز جرم نیست.

با توجه به رابطه

$$I_{ij} = \int \rho \, dv \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) \tag{17}$$

$$I_{11} = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 \left(x_2^2 + x_3^2\right) \underbrace{\int_0^b dx_1}_{x_1 |_0^b = b}$$

$$= \rho b \int_0^b dx_3 \left(\frac{x_2^3}{3} \Big|_0^b + x_3^2 x_b \Big|_0^b \right)$$

$$= \rho b \int_0^b dx_3 \left(\frac{b^3}{3} + x_3^2 b \right)$$

از نسبت جرم و طول ^{2}

$$= \rho b \frac{b^3}{3} x_3 \Big|_0^b + \rho b^2 \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^b$$

$$= \rho \frac{b^5}{3} + \rho \frac{b^5}{3} = \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2$$

$\boxed{18}$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b x_1\, dx_1 \int_0^b x_2\, dx_2 \underbrace{\int_0^b dx_3}_{x_3 \big|_0^b}$$

$$= -\rho b \int_0^b x_1\, dx_1 \left(\frac{x_2^2}{2} \right)\Big|_0^b = -\rho \frac{b^3}{2} \underbrace{\int_0^b x_1\, dx_1}_{x_1^2/2 \big|_0^b}$$

$$= -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2$$

به سادگی می‌توان بقیه انتگرال‌ها را حساب کرد با تعریف $\beta \equiv Mb^2$ خواهیم داشت

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix}$$

- این مثال بسیار آموزنده است. در ادامه درس با این مثال بیشتر فیزیک تانسور لختی را خواهیم

پایان درس