□ جواب عمومی معادله موج

معادله موج در حالت کلی به شکل معادله زیر است.

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

که $\Psi(x,t)$ حل وابسته به زمان موج است. ψ را برای تابع مستقل از زمان استفاده خواهیم کرد.

ρ چگالی خطی ریسمان، τ تنش ریسمان است. Ψ را تابع موج Wave Function گویند.

ابعاد چگالی و تنش به صورت زیر است.

$$(2)$$

$$[\rho] = ML^{-1}$$

$$[\tau] = MLT^{-2} \rightarrow \left[\frac{\rho}{\tau}\right] = L^{-2}T^{2} = \underbrace{[v]^{-2}}_{\text{از جنس سرعت}}$$

حال اگر سرعت موج را $v \equiv \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ تعریف کنیم، خواهیم داشت.

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

حال هدف این است که v تعریف شده معنای دقیق فیزیکی اش را پیدا کنیم و نشان دهیم که این کمیت سرعت انتشار موج است.

"velocity propagation"

برای این هدف مختصه های زیر را تعریف می کنیم.

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi \equiv x + vt \\ \eta \equiv x - vt \end{cases}$$

مشتق های موجود در معادله دیفرانسیل، به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$(5)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

در ادامه

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$$

حال به طریق مشابه خواهیم داشت

$$(7)\qquad \frac{1}{v}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

$$(8)\qquad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right),$$

$$= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$$

3

با جایگذاری $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ ، $1/v^2$ در معادله موج باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 \tag{9}$$

جواب معادله فوق برای تابع موج به صورت جمع دو تابع از ξ و η به صورت زیر است.

$$\Psi = f(\xi) + g(\eta) \tag{10}$$

که با جایگذاری تعریف
$$\begin{cases} \xi = x + vt \\ \eta = x - vt \end{cases}$$
خواهیم داشت.

$$\Psi = f(x+vt) + g(x-vt) \tag{11}$$

که f و g تابع دلخواهی از $x+vt$ و $x-vt$ است. حال اگر بخواهید آرگومان g ثابت باشد با افزایش زمان x هم باید افزایش یابد که مقدار g ثابت باشد. این به معنی موج پیش رونده است. تابع f موجی است که به سمت کاهش x می رود.

برای راحتی نیز می توانیم حالت خاصی از محور x را تابع موج در نظر بگیریم، در نتیجه شرط اولیه ما خواهد بود:

$$\varphi(x,0) = f(x) + g(x) \tag{12}$$

□ جداسازی متغیرها، معادله میدان

اگر به دنبال راه حل کلی برای موج هارمونیک هستیم، می‌توانیم تابع موج را به صورت زیر بنویسیم.

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{i\omega t} \tag{13}$$

اگر این ansatz را در معادله موج $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0 \tag{14}$$

نکته مهم این است که حرکت فقط محدود به یک فرکانس نیست، فرکانس‌های متفاوت وجود دارد که به تعداد درجات آزادی سیستم است، از این رو

$$\Psi_r(x,t) = \psi_r(x)\, e^{i\omega_r t} \tag{15}$$

مربوط به فرکانس ω_r

تابع موج کلی برهم‌نهی تمام مدهای فوق است، در نتیجه

$$\Psi(\vec{x},t) = \sum_r \Psi_r(x,t) = \sum_r \psi_r(x)\, e^{i\omega_r t} \tag{16}$$

در ادامه هدف این است که نشان دهیم که جواب فوق از روش جداسازی متغیرها نیز به دست می‌آید.

برای شروع فرض می‌کنیم که تابع موج کلی را به شکل زیر بنویسیم.

$$\Psi(\vec{x},t) \equiv \psi(x)\cdot\chi(t) \tag{17}$$

فرض اساسی این است که این تفکیک پذیری قابل انجام است. در حالی که این امکان همیشه شدنی نباشد

البته نمونه‌های زیادی در فیزیک داریم که این تفکیک پذیری قابل انجام است.

با جایگذاری $\Psi = \psi\chi$ در معادله موج خواهیم داشت.

$$\chi \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\psi}{v^2}\frac{d^2\chi}{dt^2} = 0 \tag{18}$$

بازنویسی

$$\underbrace{\frac{v^2}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}}_{\text{فقط تابعی از } x \text{ است.}} = \underbrace{\frac{1}{\chi}\frac{d^2\chi}{dt^2}}_{\text{فقط تابعی از } t \text{ است}} \tag{19}$$

در صورتی که برابری (19) را خواهیم داشت که LHS و RHS برابر یک ثابت باشد. برای این که برابری سازگار با نتایج فیزیکی باشد، کمیت ثابت را w^2 - در نظر می‌گیریم. از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{w^2}{v^2}\psi = 0 \tag{20}$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + w^2\chi = 0 \tag{21}$$

تشکیل این معادله، جواب‌های زیر را به همراه خواهد داشت.

$$\psi(x) = Ae^{i\left(\frac{w}{v}\right)x} + Be^{-i\left(\frac{w}{v}\right)x} \tag{22}$$

$$\chi(t) = Ce^{iwt} + De^{-iwt} \tag{23}$$

که A ، B ، C و D با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. جواب کلی به صورت زیر است:

(24)
$$\Psi(x,t) = \psi(x)\,\chi(t) \sim \exp\left[\pm i\left(\frac{\omega}{v}\right)x\right]\exp\left[\pm i\omega t\right]$$
$$\sim \exp\left[\pm i\left(\frac{\omega}{v}\right)(x \pm vt)\right]$$

این بدین معنا است که جواب نهایی ترکیب خطی چهار جواب زیر است.

(25)
$$\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}\right)(x+vt)\right]$$
$$\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}\right)(x-vt)\right]$$
$$\exp\left[-i\left(\frac{\omega}{v}\right)(x+vt)\right]$$
$$\exp\left[-i\left(\frac{\omega}{v}\right)(x-vt)\right]$$

نکته مهم این است که ثابت ω اجباری ندارد که یکی باشد بلکه می‌تواند مجموعه از فرکانس‌ها جواب باشد. از این رو

(26)
$$\Psi_r(x,t) \sim \exp\left[\pm i\left(\omega_r/v\right)(x \pm vt)\right]$$

در نتیجه جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود.

(27)
$$\Psi(x,t) \sim \sum_r a_r \Psi_r \sim \sum_r a_r \exp\left[\pm i\left(\omega_r/v\right)(x \pm vt)\right]$$

در ادامه باید توجه داشته باشیم که معادله موج را برای قسمت فضایی به شکل رابطه زیر نیز می‌نویسند

(28) $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + K^2\psi = 0 \qquad \text{Helmholtz' equation.}$$

Hermann von Helmholtz (1821–1894) . 1859 acoustic wave

که

(29) $$K^2 \equiv \frac{\omega^2}{V^2}$$

$\downarrow$

propagation constant / wave-number.

ارتباط عدد موج با طول موج به صورت زیر است.

(30) $$\lambda = \frac{V}{f}$$

طول موج ، فرکانس

$$\omega = 2\pi f$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{2\pi V}{\omega} \\ \dfrac{1}{k} = \dfrac{V}{\omega} \end{cases} \rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

در نتیجه مولفه r ام تابع موج به صورت زیر است

(31) $$\Psi_r(x,t) \sim e^{\pm i k_r (x \pm vt)}$$

$$\Psi(x,t) \sim e^{-ik(x-vt)} = e^{i(\omega t - kx)}$$

برای دو موج چپ رو و راست رو با دامنه یکسان خواهیم داشت.

(32) الف/ $\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = A e^{-iK(x+vt)} + A e^{-iK(x-vt)}$

ب/ $\Psi = A e^{-iKx} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$

ج) $\Psi = 2 A e^{-iKx} \cos(\omega t)$

د) $\mathrm{Re}\, \Psi(x,t) = 2A \cos kx \cos \omega t$

موج ایستا فوق دارای گره های زیر است

(33) $$x = \frac{(2n+1)\pi}{2} k \qquad n : \text{integer}$$

Standing Waves!

ایستاده سیم بارگذاری شده ای که آن را پیوسته کرده ایم. دارای راه حل فوق است با فاز $\pi/2$

برای ارضاء شرایط مرزی!

نکته آخر این بخش: اگر دو محیط منتشر شونده داشته باشید، مانند دو سیم با چگالی‌های متفاوت، شرایط مرزی به صورت زیر باید ارضا شود

(34) $$\Psi_1 \Big|_{x=\text{boundary}} = \Psi_2 \Big|_{x=\text{boundary}}$$

(35) $$\partial \Psi_1 / \partial x \Big|_{x=\text{boundary}} = \partial \Psi_2 / \partial x \Big|_{x=\text{boundary}}$$

سرعت فاز، رابطه پخش

برای سادگی بحث فرض کنید که تابع موج را به صورت زیر در نظر بگیریم.

(36) $$\Psi(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)}$$

که ترم تابع نمایی را فاز موج ϕ phase می‌نامیم.

(37) $$\phi = \omega t - kx$$

معنای فاز ثابت این است که مقدار تابع موج تغییر نمی‌کند. برای ثابت نگه داشتن فاز می‌توان با سرعت V (سرعت فاز) طوری حرکت کنیم که فاز ثابت باشد.

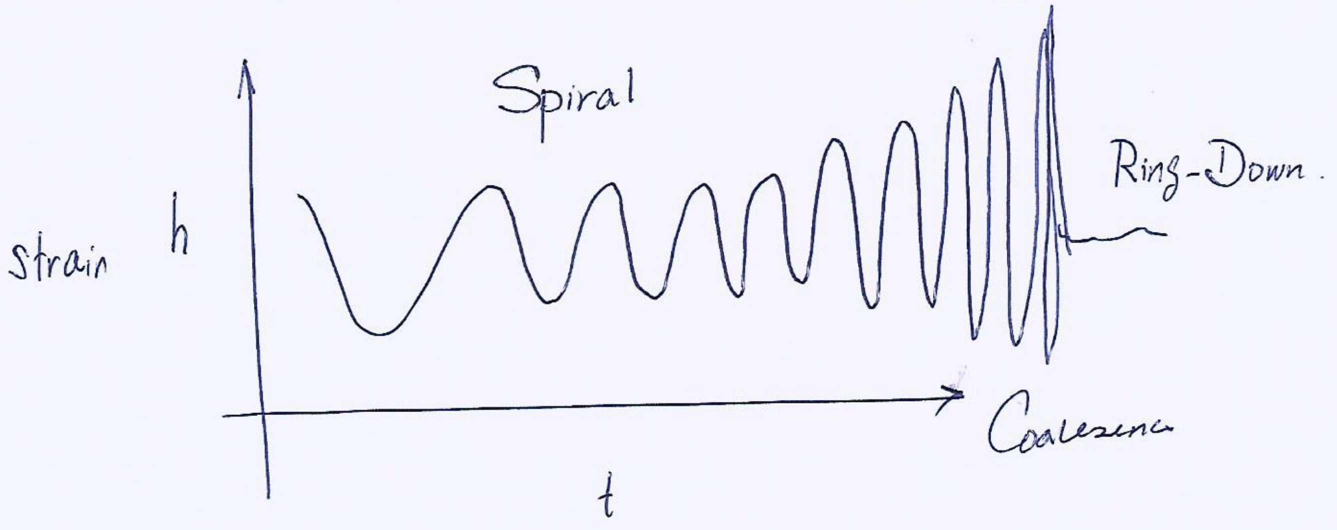
(38) $$\phi = cte \rightarrow d\phi = 0 \rightarrow \omega\, dt = k\, dx$$

در نتیجه

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

این تعریف تنها درست است که فرکانس ω خودش تابعی از زمان نباشد.

منظور حالتی از موج با فرکانس متغیر در امواج گرانشی است.



(39) $$\omega = \omega(t - t_{coal})$$

(40) $$h_+(\tau_{obs}) = h_c(\tau_{obs})\,\frac{1+\cos^2 i}{2}\,\cos\left[\Phi(\tau_{obs})\right]$$

$$h_\times(\tau_{obs}) = h_c(\tau_{obs})\,\cos i\,\sin\left[\Phi(\tau_{obs})\right]$$

که

(41) $$\Phi(\tau_{obs}) = -2\left(\frac{5G\mathcal{M}_c(z)}{c^3}\right)^{-5/8}\tau_{obs}^{5/8} + \Phi_0$$

(42) $$h_c(\tau_{obs}) = \frac{4}{d_L(z)}\left(\frac{G\mathcal{M}_c(z)}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}^{obs}(\tau_{obs})}{c}\right)^{2/3}$$

(43) $$f_{gw}^{obs}(\tau_{obs}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{256}\,\frac{1}{\tau_{obs}}\right)^{3/8}\left(\frac{G\mathcal{M}_c(z)}{c^3}\right)^{-5/8}$$

که $\mathcal{M}_c$، Chirp Mass به صورت

$$\mathcal{M}_c \equiv (1+z)M_c = (1+z)\mu^{3/5}m^{2/5}$$

$(1+z)$: انتقال به سرخ

μ: جرم کاهیده

i: زاویه صفحه مداری با راستای دید.

h_c دامنه امواج گرانشی، $+$، $\times$ دو قطبش امواج گرانشی است. فرکانس امواج گرانشی به صورت تقریبی برابر است با

(44) $$f_{gw}(\tau) \simeq 134\ \mathrm{Hz}\left(\frac{1.21\,M_\odot}{\mathcal{M}_c}\right)^{5/8}\left(\frac{1\,\mathrm{s}}{\tau}\right)^{3/8}$$

برای فهم رابطه پخش dispersion وبستگی به طول موج سرعت به مثال ریسمان بارگذاری شده برمی‌گردیم.

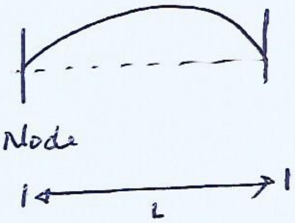
و فرکانس های ریسمان برابر بود با

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\ \sin\left[\frac{r\pi}{2(n+1)}\right] \tag{45}$$

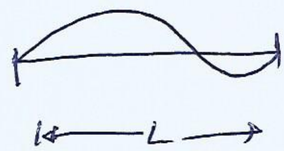
رابطه بین طول موج λ_r، طول ریسمان $L = d(n+1)$ و شماره مد r به صورت زیر است

$$\lambda_r = \frac{2L}{r} \tag{46}$$

$r=1 \quad \lambda_r = 2L$



$r=2 \quad \lambda_r = L$



درنتیجه آرگومان سینوس را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\frac{r\pi}{2(n+1)} = \frac{r\pi d}{2(n+1)d} = \frac{r\pi d}{2L} = \frac{\pi d}{\lambda_r} = \frac{k_r d}{2} \tag{47}$$

درنتیجه

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\ \sin\left(\frac{k_r d}{2}\right) \tag{48}$$

و در نتیجه سرعت فاز برابر خواهد بود با

$$V = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}}\ \frac{|\sin(Kd/2)|}{Kd/2} = V(K) \tag{49}$$

سرعت بستگی به فرکانس دارد.

به محیطی که چنین ویژگی داشته باشد، محیط dispersive می‌گویند.

منشور اپتیکی مهم‌ترین مثال محیط پاشنده است.

□ اگر دو موج بسیار نزدیک به هم از نظر فرکانس و طول موج داشته باشیم

$$\Psi_1(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} \qquad (50)$$

$$\Psi_2(x,t) = A e^{i(\Omega t - Kx)}$$

به طوری که

$$\Omega = \omega + \Delta\omega$$
$$K = k + \Delta k$$

جمع این دو موج برابر خواهد بود:

$$\Psi(x,t) = \underbrace{2A\cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right]}_{\text{slowly varying amplitude}}\cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right] \qquad (51)$$

U سرعت گروه با درخواست اینکه فاز دامنه ثابت باشد برابر است:

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} \qquad (52)$$

در محیط disipative سرعت گروه و فاز متفاوت است.